# Física II

Dr. Guillermo Sánchez Burillo.

EUPLA

# Contenidos


**1 Electrostática** **5**
1.1 Introducción . . . . . 5
1.2 Carga eléctrica . . . . . 5
1.3 Distribuciones discretas de cargas eléctricas . . . . . 6
1.3.1 Fuerza electrostática entre partículas . . . . . 6
1.3.2 Campo Eléctrico . . . . . 7
1.3.3 Energía potencial electrostática . . . . . 11
1.3.4 Potencial electrostático . . . . . 12
1.4 Distribuciones contínuas de carga . . . . . 16
1.4.1 Conductores . . . . . 16
1.4.2 Cálculo del campo E . . . . . 17
1.4.3 Ejemplos . . . . . 19
1.4.4 Teorema de Gauss . . . . . 22
1.4.5 Energía potencial electrostática en cargas no puntuales . . 28
1.5 Curvatura y campo eléctrico . . . . . 30
1.6 Capacidad y Condensadores . . . . . 31
1.7 Materiales dieléctricos . . . . . 32
1.7.1 Ley de Gauss y cargas inducidas . . . . . 35
1.7.2 Dieléctricos en condensadores . . . . . 36
1.7.3 Rotura dieléctrica . . . . . 37
1.8 Circuitos . . . . . 38
1.8.1 Ley de Ohm . . . . . 38
1.8.2 Fuente de Alimentación . . . . . 40
1.8.3 Potencia transmitida . . . . . 41
1.8.4 Resistencias en serie . . . . . 42
1.8.5 Resistencias en paralelo . . . . . 42
1.8.6 Condensadores en serie . . . . . 43
1.8.7 Condensadores en paralelo . . . . . 44

**2 Magnetismo** **45**
2.1 Introducción . . . . . 45
2.1.1 Fuentes de Camo Magnético . . . . . 46
2.2 Cargas en campos magnéticos . . . . . 46
2.2.1 Fuerza de Lorentz . . . . . 48
2.2.2 Selector de velocidades . . . . . 48
2.2.3 Espectrómetro de masas . . . . . 49
2.2.4 Fuerza sobre un cable con corriente . . . . . 50
2.3 Ley de Biot-Savart . . . . . 52

2.4 Ley de Gauss para el magnetismo . . . . . 53
2.5 Ley de Ampère . . . . . 55
2.5.1 Ejemplos . . . . . 56
2.6 Inducción Electromagnética . . . . . 59
2.6.1 Ley de Lenz . . . . . 59
2.6.2 Ley de Faraday . . . . . 60
2.6.3 Auto Inducción . . . . . 65
2.6.4 Energía asociada a $\vec{B}$ . . . . . 69
2.7 Ampliación de la Ley de Ampère . . . . . 71
2.7.1 Corriente de desplazamiento . . . . . 71
2.7.2 Materiales magnéticos . . . . . 74
2.8 Ecuaciones de Maxwell . . . . . 75

**3 Ondas mecánicas 77**
3.1 Introducción . . . . . 77
3.1.1 Periodicidad . . . . . 78
3.1.2 El número de ondas . . . . . 79
3.2 Ecuación de Ondas . . . . . 79
3.2.1 Ondas armónicas . . . . . 80
3.3 Ejemplos . . . . . 81
3.3.1 Ejemplo de Ondas longitudinales: Cilindro de gas . . . . 81
3.3.2 Ejemplo de Ondas transversales: Cuerda tensa . . . . . 84
3.4 Energía, Potencia, Intensidad . . . . . 85
3.4.1 Ondas que se propagan a través de una sección $A$ . . . . . 86
3.4.2 Energía de Ondas sonoras armónicas . . . . . 87
3.4.3 Ondas en dos y tres dimensiones . . . . . 88
3.5 Superposición de ondas (una dimensión) . . . . . 89
3.5.1 Ondas longitudinales . . . . . 89
3.5.2 Ondas Transversales: Polarización . . . . . 91
3.6 Reflexión y Transmisión de ondas (1 dimensión) . . . . . 92
3.6.1 Reflexión total . . . . . 95
3.7 Ondas estacionarias . . . . . 95
3.7.1 Ondas estacionarias con extremos fijos . . . . . 96
3.7.2 Un extremo fijo y uno libre . . . . . 99
3.7.3 Ondas estacionarias: Dos extremos libres . . . . . 102
3.8 Efecto Doppler . . . . . 102
3.8.1 Fuente en movimiento . . . . . 102
3.8.2 Observador en movimiento . . . . . 104
3.8.3 Caso general . . . . . 105
3.9 Ondas Electromagnéticas . . . . . 105

# Capítulo 1

# Electrostática

## 1.1 Introducción

Las interacciones de naturaleza electrostática son fundamentales para entender el universo. Diversos fenómenos a muy distintas escalas espaciales están relacionados con las fuerzas que actúan entre cargas eléctricas: Desde las auroras boreales hasta las interacciones responsables de la estabilidad de los átomos y las moléculas, pasando por las ondas de radio, el funcionamiento de todos los dispositivos electrónicos que tenemos en casa o los procesos de biología molecular, entre otros muchos fenómenos, son consecuencia de las interacciones entre cargas eléctricas.

Desde la antigüedad es conocido que la fricción del ambar hace que éste atraiga a cuerpos ligeros. La palabra griega para designar el ámbar es *elektron*, de ahí el nombre de la electricidad. Varios siglos más adelante se observó que hay dos "tipos de electricidad", de manera que entre dos objetos que tengan electricidad "del mismo tipo" se produce una repulsión, y si tienen electricidad "de distinto tipo", hay atracción. Hoy hablamos de **carga eléctrica**, y esos dos "tipos" son carga eléctrica **positiva y negativa**.

## 1.2 Carga eléctrica

Hoy se sabe que la carga eléctrica es una propiedad de todas las partículas. Al igual que cada partícula tiene su masa, también tiene su carga eléctrica. Mientras que la masa se mide, en el Sistema Internacional, en kilogramos, la carga se mide en **Culombios** (C).

La materia está constituida fundamentalmente por átomos. Los átomos, a su vez, están constituidos por tres tipos de partículas: electrones, protones y neutrones. En el *núcleo*, cuyo tamaño es sólo una fracción del volumen total del átomo, hay protones y neutrones. Los segundos carecen de carga eléctrica, mientras que los primeros tienen carga positiva. La carga del protón es:

$$q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Orbitando en torno al núcleo están los electrones, que tienen la misma carga que los protones pero con signo opuesto.

$$q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Los átomos tienen tantos protones como electrones, por eso son neutros eléctricamente. Si le retiramos un electrón al átomo, éste queda cargado positivamente, mientras que si a un átomo neutro se le incorpora un electrón, queda cargado negativamente. A los átomos cargados se les denomina *iones*.

Un cuerpo que sea *neutro* tiene tantas cargas positivas como negativas. Mediante algunos procesos, como la fricción, se le pueden extraer (o incorporar) algunos electrones, de manera que quedaría cargado positivamente (o negativamente). La carga eléctrica no se puede crear ni destruir, de modo que cuando, por ejemplo por fricción, cargamos un objeto, aquéllo con lo que lo frotamos también quedaría con la misma carga, pero de signo opuesto.

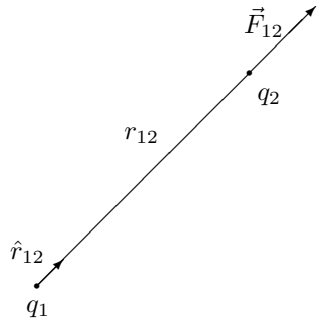
Algunos materiales, llamados **conductores**, permiten el flujo de la carga eléctrica en su seno. Se trata fundamentalmente de metales, que se caracterizan por tener una red de átomos que conforman su estructura, pero sin que (todos) sus electrones estén anclados en torno al núcleo atómico, sino que tienen movilidad. Al existir partículas cargadas que tienen movilidad, los conductores pueden transferir carga. En cambio, los materiales **aislantes**, tienen todos sus electrones anclados, orbitando en torno a sus núcleos atómicos respectivos. Por eso no pueden transferir carga eléctrica.

## 1.3 Distribuciones discretas de cargas eléctricas

Por el momento nos ocuparemos exclusivamente de las interacciones de naturaleza eléctrica que tienen lugar entre cargas eléctricas que son puntuales.

### 1.3.1 Fuerza electrostática entre partículas

La interacción entre dos partículas puntuales con carga eléctrica es proporcional a la magnitud de estas cargas e inversamente proporcional a la distancia que las separa. Supongamos que tenemos en el vacío dos cargas de magnitudes $q_1$ y $q_2$, y que $\vec{r}_{12}$ es el vector que va desde la primera a la segunda. Si el valor absoluto de ese vector es $r_{12}$, y el vector unitario que apunta en su dirección y sentido es $\hat{r}_{12}$, entonces $\vec{r}_{12} = r_{12}\hat{r}_{12}$. Supongamos que ambas cargas tienen el mismo signo. Entonces, la fuerza que actúa sobre la partícula 2 será como se muestra en la figura:




La fuerza que la partícula 2 experimenta como consecuencia de su interacción con la partícula 1 es $\vec{F}_{12}$. Su dirección vendrá determinada por el vector que une ambas partículas. Su magnitud es proporcional a ambas cargas, e inversamente

proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Según la **Ley de Coulomb** es:

$$\vec{F}_{12} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \tag{1.1}$$

$K$ es una constante y vale

$$K = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

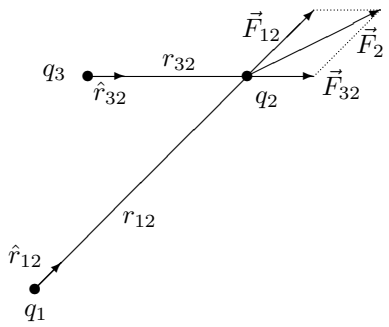
Habitualmente se presenta en función de $\epsilon_0$, la llamada permitividad eléctrica del vacío:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \implies \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

Esta ecuación ya tiene en cuenta que los signos de las cargas pueden ser positivos o negativos. Si ambas cargas tienen el mismo signo, la fuerza tendrá el sentido de $\hat{r}_{12}$, mientras que si tienen signos distintos, la fuerza irá en el sentido de $-\hat{r}_{12}$. La fuerza que sentirá la partícula 1 será, por la tercera ley de Newton, igual y de sentido contrario. Para calcularla utilizando la Ley de Coulomb, podemos utilizar la misma ecuación que antes pero sustituyendo $\hat{r}_{12}$ por $\hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$.

**Principio de superposición**

Veamos a continuación qué sucede si, a las cargas que teníamos antes, les añadimos una tercera, con carga $q_3$. ¿Qué fuerza actuaría sobre la partícula 2? El principio de superposición nos dice que la fuerza total que actuaría sobre la carga $q_2$ sería la suma de su interacción con la carga $q_1$ y su interacción con $q_3$. Cada una de estas interacciones las calculamos individualmente, entre pares de partículas, como si no hubiese ninguna más.




Es decir, la fuerza que actúa sobre la partícula 2 es:

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$$

### 1.3.2 Campo Eléctrico

Volvamos a pensar sobre la ecuación de Coulomb.

Tenemos una carga $Q$, y una carga $q$. Supongamos que $Q$ está en el origen de coordenadas $O$, y $q$ en la posición $\vec{r}$. Por tanto, están separadas por un vector $\vec{r} = r\hat{r}$. La fuerza que actúa sobre la carga $q$ es:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\hat{r}$$

El **campo eléctrico** que crea la carga $Q$, que señalamos con el símbolo $\vec{E}$, es igual al cociente entre la fuerza que sentiría una carga de pruebas $q$ situada en $\vec{r}$, dividida por el valor de dicha carga $q$. Es una magnitud vectorial que depende de la posición. Cuando se dice que es magnitud vectorial, quiere decir que tiene una dirección y sentido. Como depende de la posición $\vec{r}$, decimos $\vec{E}(\vec{r})$.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

es decir, el campo eléctrico creado por la carga $Q$ es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Algunas consideraciones acerca del campo eléctrico creado por una carga eléctrica puntual.

1. La carga $Q$ crea el campo eléctrico $\vec{E}$ sin necesidad de que exista la carga $q$. Para que haya una fuerza *si* que tiene que haber al menos dos partículas cargadas, obviamente.

2. El campo creado por una sola partícula es radial. Si la carga $Q$ es positiva, entonces $\vec{E}$ 'sale' de $Q$. Si la carga $Q$ es negativa, $\vec{E}$ 'entra' en $Q$ (ver figura 1.1).

3. Obsérvese que el vector $\vec{E}$ en el punto $\vec{r}$ tiene el sentido que tendría la fuerza que actuaría sobre una carga positiva situada en dicha posición.

4. En unidades del sistema internacional, se mide en Newtons dividido por Culombios, $N/C$.

Evidentemente, al incluir más cargas puntuales en el sistema, los campos eléctricos pueden ser mucho más complicados. Sin embargo, lo podemos calcular en cualquier punto del espacio si conocemos la configuración de las cargas que lo crean.

El principio de superposición también se aplica para calcular el campo eléctrico creado por varias cargas puntuales en un punto. Si es válido para calcular fuerzas, también ha de serlo para calcular campos eléctricos.

Supongamos que tenemos un gran número de cargas eléctricas puntuales. En un punto dado por la posición $\vec{r}$, el campo creado por diversas cargas será la suma de los campos eléctricos que cada una de las cargas crea en $\vec{r}$. Y cada uno de esos campos eléctricos individuales, los calculamos como si no hubiese más partículas que la que lo crea. El resultado final dependerá de la configuración de las cargas, es decir, del valor de dichas cargas eléctricas y de sus respectivas posiciones en el espacio.

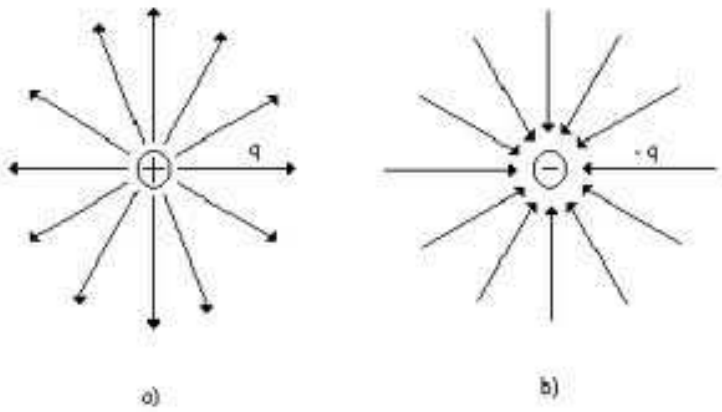
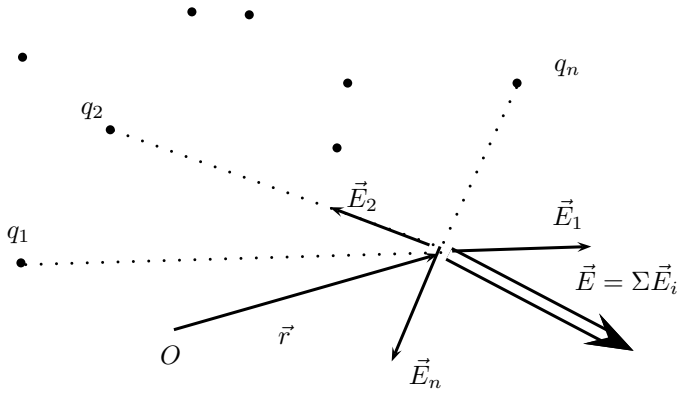



Figure 1.1: Campo eléctrico generado por una carga positiva (izquierda) o una carga negativa (derecha)



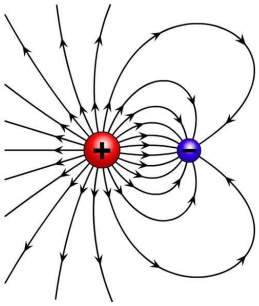

Podemos estudiar el campo eléctrico originado por una configuración relativamente sencilla: un par de cargas separadas por una distancia fija.

Por ejemplo, estudiemos el campo creado por dos cargas, de distinto signo. Tenemos $q_1 > 0$ en el punto $x = 0$ y $q_2 < 0$ en el punto $x = d$. Se ha de tener en cuenta que en los puntos muy próximos a una de las cargas (muy cerca comparado con $d$), el campo es prácticamente el mismo que tendríamos en ausencia de la otra, porque depende del cuadrado de la distancia. En los puntos muy lejanos a las cargas (a distancia mucho mayor que $d$), el campo es el mismo que encontraríamos si sólo hubiese una carga $q = q_1 + q_2$.

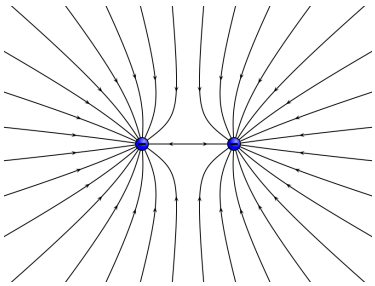
Ahora, siguiendo ese razonamiento, vamos a ver qué pasa si, por ejemplo, $q_1 = 2\mu C$ en $x = 0$ y $q_2 = -1\mu C$ en $x = d$.

Nos quedaremos por ahora en el eje $OX$. Inmediatamente a la derecha de la carga negativa, el campo apunta hacia el sentido decreciente de x, porque estamos muy cerca de la carga negativa. Pero a grandes distancias a la derecha de las cargas, es decir, a distancias mucho mayores que $d$, el campo eléctrico resultante es el mismo que existiría si sólo hubiese una carga que fuese la suma $2\mu C - 1\mu C = +1\mu C$. Entonces, $\vec{E}$ apuntará hacia la derecha.

Tenemos que en $x$ ligeramente mayor que $d$, $\vec{E}$ apunta a la izquierda, y en $x >> d$, apunta a la derecha. Eso quiere decir que en algún punto entre esas dos zonas el campo eléctrico tiene que ser cero. Es decir, hay un punto donde,

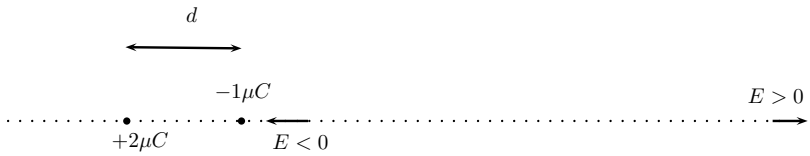


(a) Campo eléctrico generado por un par de cargas de distinto signo. Fuente: `commons.wikimedia.org` Autor: `PLATO` Learning.



(b) Campo eléctrico generado por un par de cargas del mismo signo. Fuente: `commons.wikimedia.org` Autor: `Geek3`.

si se deposita una carga eléctrica, no se moverá porque la fuerza que actuará sobre ella es cero. (Ejercicio 1).




Para representar el campo eléctrico se utilizan a menudo las *líneas de campo*, que indican en todo punto la dirección del mismo. Además, la proximidad entre líneas de campo indica mayor magnitud de $\vec{E}$ que las líneas separadas. Los diagramas de líneas de campo son especialmente útiles para representar campos cuando hay más de una partícula.

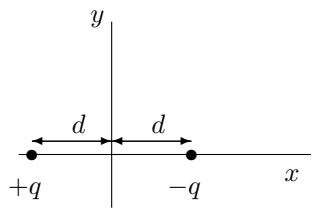
Otra configuración interesante es la de dos cargas del mismo signo, separadas por una distancia fija (ver figura 1.2b). En este caso, el punto donde el campo eléctrico vale cero está entre ambas cargas. Ejercicio 2.

### Dipolos eléctricos

Un caso especial es el constituído por dos cargas de igual magnitud y signos opuestos, separadas por una distancia fija. Se trata de un *dipolo eléctrico*. Y es una configuración de cargas muy sencilla pero a la vez muy especial:

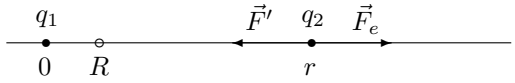
- El campo eléctrico que crea el dipolo no se anula en ningún punto de su eje (salvo, claro está, con $x \to \pm\infty$).
- A distancias grandes comparadas con la separación entre cargas, el campo creado no equivale al que tendríamos si hubiese una sola carga puntual cuyo valor fuese la suma.
- Se puede demostrar que el campo eléctrico creado, a grandes distancias, decae como $E \propto 1/r^3$.

Ejercicio 3.




### 1.3.3 Energía potencial electrostática

Supongamos que tenemos dos cargas, $q_1$ y $q_2$ separadas por una distancia $R$. Supongamos que ambas son positivas. Como, por la ley de Coulomb, existe una repulsión entre ellas, esta es una situación que no tendremos de manera espontánea, sino que hemos tenido que realizar un trabajo, invertir energía, para conseguir que se aproximen hasta distar $R$. Esa es la energía potencial electrostática. Vamos a ver cuanta energía nos ha hecho falta para lograrlo.




En primer lugar, suponemos que las cargas están infinitamente separadas, es decir, inicialmente no hay repulsión. Entonces comenzamos a acercar la carga $q_2$. Para acercar la carga, desde un punto en $x = \infty$ hasta un punto en $x = R$, necesitamos vencer la fuerza de Coulomb $F_e$, de repulsión, es decir, tendremos que hacer una fuerza $\vec{F}' = -\vec{F}_e$.

El trabajo que hay que hacer para traer la carga $q_2$ desde el infinito hasta una distancia $R$ de la carga $q_1$ (que tomamos como origen de coordenadas) es, por definición, la integral desde el punto de partida hasta el punto de destino de la fuerza que se ejerce a lo largo del camino realizado:

$$W = \int_{\infty}^{R} \vec{F}' \cdot d\vec{r}$$

Como estamos yendo desde $\infty$ hasta $R$, el vector $d\vec{r}$ es una porción infinitesimal de ese camino y apunta hacia la izquierda en la figura anterior.

Como $\vec{F}' = -\vec{F}_e$, podemos introducir la fuerza eléctrica en la expresión del trabajo, cambiando el signo. Pero ese cambio de signo es equivalente a intercambiar los límites de integración, por tanto:

$$W = \int_{R}^{\infty} \vec{F}_e \cdot d\vec{r}$$

Obsérvese que ahora estamos calculando una integral en un camino que va desde $R$ hasta $\infty$. Por tanto ahora $d\vec{r}$ apunta hacia la derecha en el gráfico anterior.

Por otro lado, la fuerza la calculamos con la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_e(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} \implies$$

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\int_{R}^{\infty} \frac{\hat{r}\cdot d\vec{r}}{r^2}$$

En primer lugar nos ocuparemos del producto escalar que tenemos dentro de la integral. Como $\hat{r}$ y $d\vec{r}$ apuntan en la misma dirección, su producto escalar es el producto de sus módulos. El módulo del primero es uno, y el módulo del segundo es $dr$. A continuación, resolvemos la integral, que es directa:

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_R^\infty = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right] \Longrightarrow$$

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Esa es la energía que hemos utilizado para situar las cargas a una distancia $R$. Es la **energía potencial electrostática** de nuestro sistema, y la escribimos con la letra $U$.

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Al tratarse de energía, se mide en Julios en el Sistema Internacional.

Si las dos cargas tienen el mismo signo, la ley de Coulomb nos dice que se repelen, y por tanto, para conseguir acercarlas, tenemos que invertir una cantidad positiva de energía. En efecto, $U > 0$. Sin embargo, cuando tienen signos diferentes, la energía potencial electrostática es negativa, $U < 0$.

Las fuerzas electrostáticas son conservativas. Eso significa que el trabajo que realiza la fuerza al llevar una partícula de un punto a otro es independiente del camino que se siga, y sólo depende de las posiciones inicial y final. Por lo tanto, en el ejemplo anterior, la cantidad de energía que se consume si se realiza el camino en línea recta y si se sigue un camino distinto es la misma.

Si se siguen colocando, en el ejemplo anterior, nuevas cargas, positivas o negativas, habría que ir sumando nuevas contribuciones a la energía potencial electrostática del sistema. Para colocar una tercera carga, $q_3$, tendríamos que calcular el trabajo que se hace al traerla desde el infinito, considerando las fuerzas electrostáticas con que interacciona con las cargas $q_1$ y $q_2$. Si a ello le añadimos una cuarta carga sumaríamos a la energía potencial del sistema el trabajo realizado al traer $q_4$ desde el infinito, teniendo en cuenta la interacción electrostática de ésta con $q_1$, $q_2$ y $q_3$, y así sucesivamente.

### 1.3.4 Potencial electrostático

Supongamos que tenemos una carga $Q$. Si se colocase una carga de pruebas $q$ a una distancia $R$, la energía potencial electrostática sería:

$$U = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Es decir, $U$ sería la cantidad de trabajo que habría que realizar para ubicar una carga $q$ a distancia $R$ de $Q$. El **potencial electrostático** en un punto se define como el *trabajo por unidad de carga* que hay que realizar para llegar desde el infinito hasta ese punto. Como ese trabajo es $U$, el potencial electrostático, para el que utilizamos la letra $V$, es $U/q$, es decir:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

En el sistema internacional de unidades, el potencial electrostático se mide en Julios por Culombio, $J/C$. Sin embargo, es más común llamar a esta cantidad

Volts. $1V = 1J/C$. El potencial electrostático, al igual que la energía potencial electrostática, es una magnitud escalar, no vectorial.

La expresión que tenemos de $V$ es la del potencial electrostático que una carga $Q$ crea en un punto a una distancia $R$. El signo del potencial depende, pues, del signo de la carga $Q$. El potencial en el infinito es $V_\infty = 0$.

Cuando tenemos distintas cargas puntuales repartidas en el espacio, el potencial electrostático en un punto determinado lo calculamos como la suma de los potenciales electrostáticos en ese punto creados por cada una de las cargas, si éstas estuviesen aisladas de las demás. Esto es una consecuencia del principio de superposición.

Cuando lo que tenemos son configuraciones de cargas desconocidas, pero lo que conocemos es el campo eléctrico, también podemos calcular el potencial electrostático recurriendo a su definición:

$$V(\vec{r}) = \int_R^\infty \frac{\vec{F}_e \cdot d\vec{r}}{q}$$

Pero el cociente entre fuerza electrostática y la carga de prueba con que hacemos el cálculo es, precisamente, el campo eléctrico:

$$V(\vec{r}) = \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Si, desde una distancia muy lejana, llevamos una carga $q$ hasta el punto del espacio $\vec{r}$, la cantidad de trabajo que hemos realizado es, precisamente

$$W = qV(\vec{r})$$

Como estamos con fuerzas conservativas, el trabajo que hay que hacer para ir desde una posición $\vec{r}_1$ hasta $\vec{r}_2$ es el trabajo para ir desde el infinito hasta $\vec{r}_2$ menos el trabajo para ir desde $\vec{r}_1$ hasta el infinito, es decir,

$$W_{\vec{r}_1 \to \vec{r}_2} = q(V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1))$$

Y el trabajo que se realiza sobre una partícula que pasa de $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ es, según el teorema de las fuerzas vivas, la variación de su energía cinética.

### Superficies equipotenciales

Obsérvese que, según la expresión del potencial electrostático creado por una carga puntual $Q$, en cualquier punto de una esfera de radio $R$ en torno a dicha carga el potencial es el mismo. Se dice cada esfera centrada en $Q$ es una *superficie equipotencial*: en todos sus puntos el potencial tiene el mismo valor. Las líneas de campo son siempre perpendiculares a las superficies equipotenciales. Moverse a lo largo de la superficie no cuesta trabajo.

Cuando tenemos pares de cargas, las superficies equipotenciales son más complicadas, como se puede observar en la gráfica 1.2.

Es interesante observar que una de las superficies equipotenciales creadas por el par de cargas del mismo signo tiene un punto de cruce que separa el volumen que hay en su interior en dos. Ese punto es el punto donde el campo eléctrico es cero, pero eso no quiere decir que en esa superficie equipotencial el potencial electrostático sea cero (de hecho no lo es).

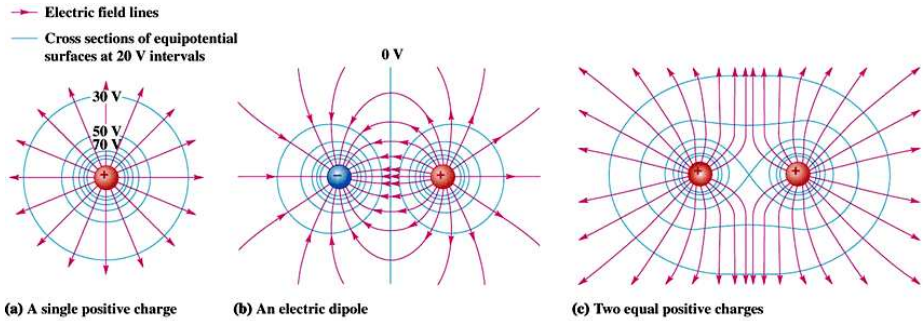



Figure 1.2: Superficies equipotenciales para una carga (i), un dipolo (c) y dos cargas iguales (d). Fuente: `hyperphysics.phy-astr.gsu.edu`

Muy cerca de cada una de esas cargas, las superficies equipotenciales son prácticamente esféricas. Y muy lejos, las superficies también lo serían, y el potencial es el mismo que habría con una carga que fuese la suma de ambas.

Con una configuración de cargas eléctricas de distinto signo, sucede algo similar.

Por nuestra experiencia ya sabemos que, conocido el valor en un punto del campo eléctrico, sabemos qué fuerza actuaría sobre una carga $q$:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

El interés del potencial electrostático radica en que es relativamente fácil de medir experimentalmente, más que el campo eléctrico. Éste, además, es dificil de calcular cuando tenemos configuraciones complejas de cargas eléctricas.

Si tenemos dos puntos en el espacio, A, y B, separados por una distancia $R$, podemos calcular sus respectivos potenciales electrostáticos:

$$V_A = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}, \qquad V_B = \int_B^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Entonces la *diferencia de potencial* es:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

El campo eléctrico es siempre perpendicular a las superficies equipotenciales. Por lo tanto, si nos movemos dentro de la superficie equipotencial, con $d\vec{r}$ dentro de la superficie equipotencial, entonces $d\vec{r}$ es perpendicular al campo $\vec{E}$, y por tanto su producto escalar es cero. En efecto, la diferencia de potencial electrostático entre dos puntos dentro de una superficie equipotencial es cero, como cabía de esperar.

Las cargas positivas tienden a desplazarse desde las superficies a potenciales electrostáticos altos hacia las superficies de potencial bajo. Y al hacerlo, pierden energía potencial electrostática, que se convierte en energía cinética. Al pasar de un potencial de 100 V a uno de 40 V, una carga $+q$ pasa de tener una

energía potencial electrostática $U = 100q$ J a $U = 40q$ J. La diferencia se ha convertido en energía cinética: $\Delta E_c = (100 - 40)q = 60q$ J. Conociendo las superficies equipotenciales, o las diferencias de potencial entre las que se mueve una partícula cargada, podemos conocer la variación de su energía cinética, aunque desconozcamos el campo eléctrico y la configuración de las cargas que lo crean.

Nótese que mientras que las cargas positivas se desplazan hacia zonas de menor potencial electrostático, las negativas hacen lo contrario: se tienden a mover hacia zonas de mayor potencial electrostático.

Nótese además que lo que realmente importa en el movimiento de las cargas no son los potenciales que hay en los puntos entre los que se mueve, sino la diferencia entre el potencial en esos puntos.

Ejercicios 4 y 7.

### Cálculo del campo Eléctrico a partir del Potencial

Hemos visto que el potencial en un punto $P$ se calcula como la integral del campo electrico a lo largo del camino seguido:

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(para integrales de camino se utiliza normalmente $d\vec{l}$ en lugar de $d\vec{r}$. Se trata simplemente de una cuestión de notación.)

Entonces, derivando para eliminar la integral:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Como estamos en un espacio tridimiensional (en general), el campo eléctrico y el elemento $d\vec{l}$ tienen sus componentes cartesianas:

$$\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}, \qquad d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

Por tanto,

$$dV = -(E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

El potencial electrostático depende de la posición. Por tanto, el elemento diferencial $dV$ se puede descomponer usando derivadas direccionales:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Si comparamos con la expresión anterior, identificamos términos:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

El operado gradiente $\vec{\nabla}$ se define así:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

Por tanto, el campo eléctrico:

$$\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{x}\right) = -\vec{\nabla}V$$

El campo eléctrico se mide tanto en Newtons dividido por Culombio ($N/C$) como en Voltios dividido por metro ($V/m$). Son unidades equivalentes.

## 1.4 Distribuciones contínuas de carga

La Ley de Coulomb nos permite calcular la fuerza entre dos cargas eléctricas puntuales, o el campo eléctrico creado por una carga puntual. Por el principio de superposición, podemos calcular el campo eléctrico creado por varias cargas puntuales.

Sin embargo, cuando tenemos una distribución contínua de carga, la Ley de Coulomb no la podemos aplicar directamente. Por ejemplo, si tenemos un cuerpo, de un determinado volumen, con carga eléctrica repartida por todo el objeto.

Antes de ver cómo se pueden calcular esos campos eléctricos, veamos cómo son esas distribuciones de carga a lo largo del volumen de determinados materiales.

### 1.4.1 Conductores

Los conductores, metales fundamentalmente, permiten el flujo de partículas con carga eléctrica en su interior. Cuando el metal es neutro eléctricamente, quiere decir que alberga tantas cargas positivas como negativas.

Si un metal posee carga eléctrica neta, podemos preguntarnos cómo se distribuirá esa carga. Si tiene carga eléctrica, ya sea negativa o positiva, se ha de tener en cuenta que las partículas que poseen carga positiva (o negativa), que están en el interior del metal, se repelen entre sí (por la Ley de Coulomb). Como pueden moverse con libertad en el seno del conductor, se repartirán por la superficie, de manera que estén lo más alejadas entre sí. Es la configuración para la que la energía potencial electrostática es mínima.

Si, además, el conductor tiene forma esférica, la carga se reparte, no sólo en la superficie, sino que también lo hará de manera homogénea.

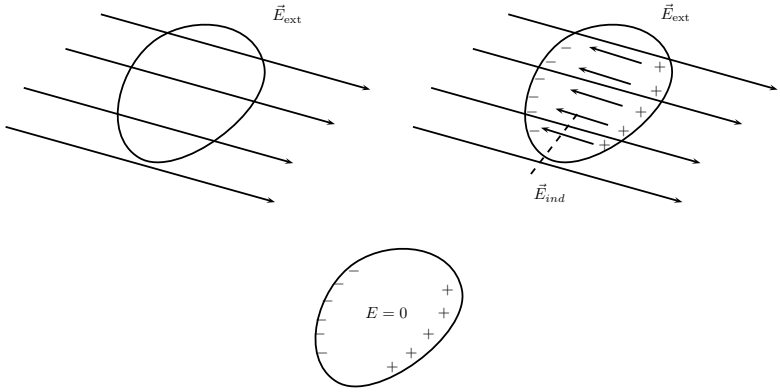
Por lo tanto, en los metales cargados, podemos hablar de carga total $Q$ o de densidad superficial de carga $\sigma$, que es la magnitud que mide carga eléctrica por unidad de superficie (Culombios/m$^2$).

Veamos a continuación qué sucede con un metal neutro cuando se ve sometido a un campo eléctrico externo.

Al cruzar las líneas de campo el metal sólido, las cargas del metal (como es neutro tiene tantas cargas positivas como negativas) se verán afectadas. Las cargas positivas se desplazarán en la dirección y el sentido de las líneas de campo, y las negativas en el sentido contrario. Por lo tanto, se dice que el metal se **polariza**, porque, aunque sigue siendo neutro globalmente, ahora tiene las cargas repartidas de manera no homogénea, hay una parte que es el 'polo negativo' y otra que es el 'polo positivo'.

Esta polaridad da lugar a un **campo eléctrico inducido** en el interior del conductor, creado por las cargas eléctricas que ya no están repartidas de manera

homogénea. El desplazamiento de cargas tiene lugar hasta que llega el momento en que los dos campos eléctricos, el externo y el inducido, se anulan. Por tanto, **en el interior del metal el campo eléctrico es nulo**.




Si el metal es hueco, en el interior el campo sigue siendo cero. Un hueco en el interior de un conductor queda aislado completamente de la influencia de los campos eléctricos externos. El campo eléctrico inducido por la redistribución de cargas hace que en el hueco interno el campo total se anule. Este fenómeno es conocido como *Jaula de Faraday*, y hace que las radios o teléfonos móviles se escuchen peor en edificios recubiertos de rejas metálicas, o en ascensores. También es lo que hace que los rayos que impactan en aviones en vuelo no se perciban en el interior. Ni siquiera en los de Ryanair.

Únicamente los campos eléctricos externos con fuerte dependencia temporal pueden sentirse en el interior (si el campo externo cambia en tiempos mucho menores que el tiempo que tardan las cargas en redistribuirse).

### 1.4.2 Cálculo del campo E

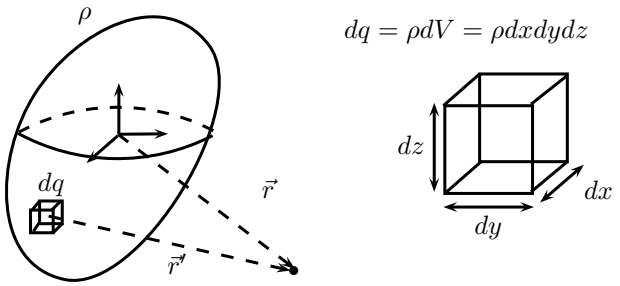
#### Cargas distribuidas en volumen

Cuando tenemos una carga eléctrica distribuida por un volumen, no podemos, al menos a priori, utilizar la Ley de Coulomb de manera directa para determinar el campo eléctrico en un punto $\vec{r}$, tomando como origen de coordenadas el centro del volumen cargado.

Si la carga está distribuida de manera uniforme, podemos hablar de densidad de carga $\rho = Q/V$ (carga partido por volumen). Esto nunca sucederá en materiales conductores, donde como sabemos las cargas se reparten por la superficie, en el interior no queda carga neta. Pero en materiales aislantes, en principio, se puede conseguir.

Entonces, podemos dividir el cuerpo que estemos estudiando en pequeños elementos diferenciales de volumen, cubos infinitesimales de tamaño $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Cada uno de estos cubos tendrá una pequeña cantidad de carga $dq = \rho dV = \rho dx \cdot dy \cdot dz$. El campo eléctrico que crea en el punto $\vec{r}$ este pequeño elemento de volumen con carga eléctrica sí que lo podemos calcular utilizando la ley de Coulomb, porque su tamaño lo podemos considerar puntual. Crearía un campo eléctrico:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r'^2}\hat{r}'$$




Si ahora lo que queremos es saber el campo eléctrico creado por todo el volumen, lo que tenemos que hacer es aplicar el ya mencionado *principio de superposición* y sumar los campos eléctricos creados por todos los elementos de volumen que constituyen el cuerpo cargado. Esta suma de elementos $d\vec{E}$ es una integral, que convertimos en integral de volumen:

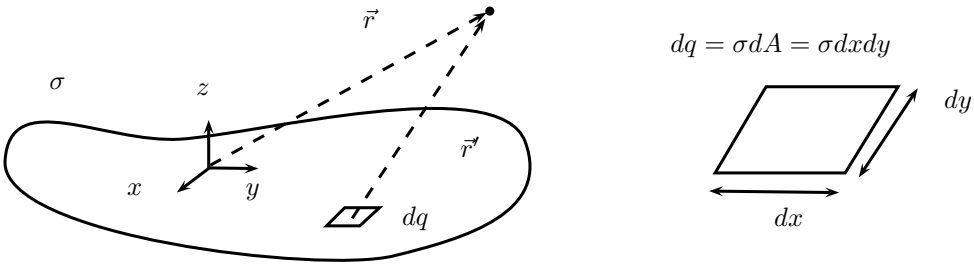
$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E} = \int_{\text{Vol}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r'^2} \hat{r}' = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int\int\int \frac{dxdydz}{r'^2} \hat{r}'$$

Es una integral que pude ser bastante complicada, sobre todo si el volumen que estudiamos tiene forma irregular. En caso de que la densidad de carga $\rho$ no sea constante, se complica aún más.

### Cargas distribuídas en superficies

Si la carga eléctrica está repartida en una superficie (por ejemplo, la superficie de un metal), tampoco podemos calcular directamente el campo eléctrico aplicando la ley de Coulomb. Ahora lo que tenemos es una superficie cargada, por lo tanto hablamos de *densidad superficial de carga* $\sigma = Q/S$ (carga dividida por superficie). Vamos a suponer, por simplicidad, que la superficie está contenida en el plano $X - Y$. Podemos dividirla en pequeños elementos de superficie, de área $dA = dx \cdot dy$, como se muestra en la figura. Cada uno de estos elementos contendrá una pequeña cantidad de carga $dq = dA \cdot \sigma = dx \cdot dy \cdot \sigma$, que creará un campo eléctrico en el punto $\vec{r}$ representado en la figura. Como podemos considerar que es una carga puntual, ese campo es:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r'^2} \hat{r}'$$




De nuevo, para calcular el valor del campo eléctrico creado en $\vec{r}$ por toda la superficie, tenemos que integrar, pero ahora es una integral de superficie.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E} = \int_{\text{Sup.}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dA}{r'^2} \hat{r}' = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int\int \frac{dxdy}{r'^2} \hat{r}'$$

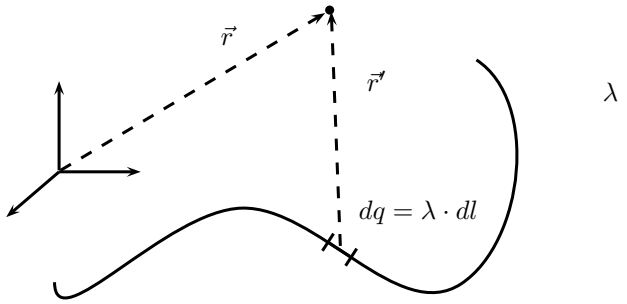
De nuevo, una integral que puede, en ocasiones ser complicada.

**Distribuciones lineales de carga**

Ahora vamos a considerar el campo eléctrico creado por una distribución lineal. Por ejemplo un cable, muy fino, cargado. Ahora es más conveniente hablar de *densidad lineal de carga* $\lambda = Q/L$ (carga dividido entre longitud).

Ahora, lo que haremos para poder aplicar la ley de Coulomb es dividir el cable en pequeños fragmentos de tamaño $dl$, cada uno de los cuales se pueda considerar puntual, y calcular el campo eléctrico que crean. La carga que contiene el elemento de cable es $dq = \lambda \cdot dl$. Y el campo eléctrico creado por esa carga, que se puede considerar puntual:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r'^2}\hat{r}'$$




Por lo tanto, integramos, para considerar a todos los pequeños fragmentos de cable y los respectivos campos eléctricos que crean en $\vec{r}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E} = \int_{\text{cable}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dl}{r'^2}\hat{r}' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{cable}} \frac{dl}{r'^2}\hat{r}'$$

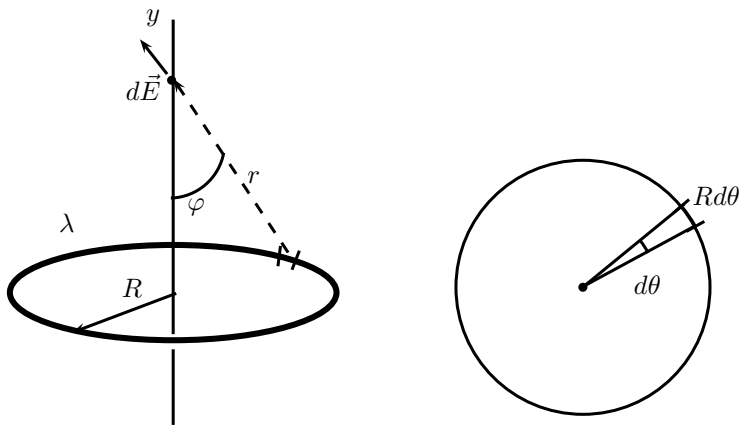
Estas integrales pueden ser muy complejas, aunque existen algunos casos relativamente sencillos, que estudiaremos a continuación.

Ejercicio 8.

### 1.4.3 Ejemplos

**Campo eléctrico creado por un anillo**

Estudiamos ahora el campo eléctrico creado en su eje por un anillo de densidad lineal de carga constante $\lambda$ y radio $R$, como se muestra en la figura. La carga total que posee el anillo es su longitud por su densidad lineal, es decir $Q = 2\pi R\lambda$.




Vamos a calcular el campo $d\vec{E}$ que cada pequeño fragmento de aro crea a un distancia $y$ del centro del anillo. Un elemento del aro de longitud $dl$, tiene una carga $dq = \lambda \cdot dl$, y está a distancia $r = \sqrt{y^2 + R^2}$ del punto donde queremos conocer el campo. El campo que crea es, en valor absuluto:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot dl}{r^2}$$

Por la simetría podemos ver que únicamente necesitamos conocer la componente en la dirección $y$ del campo $\vec{E}$. En los puntos del eje, las componentes del vector campo eléctrico en otras direcciones se anulan. La componente $dE_y$ la calculamos como:

$$dE_y = dE \cos\varphi = dE \frac{y}{r}$$

La longitud del elemento de aro que estamos estudiando es $dl = Rd\theta$, es decir, el arco es igual al radio por el ángulo (en radianes!). Por tanto, podemos reescribir la componente $y$ del campo eléctrico que crea este fragmento así:

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot Rd\theta}{R^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot yRd\theta}{(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

Para calcular el campo total creado en cualquier punto del eje, a distancia $y$ del centro del aro, debemos sumar los $dE_y$ que crean todos y cada uno de los pequeños framentos del aro. La variable de integración aquí es el ángulo $\theta$, y para cubrir el aro completo, los límites de integración deben ser 0 y $2\pi$:

$$E_y = \int_{\text{Aro}} dE_y = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot yRd\theta}{(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

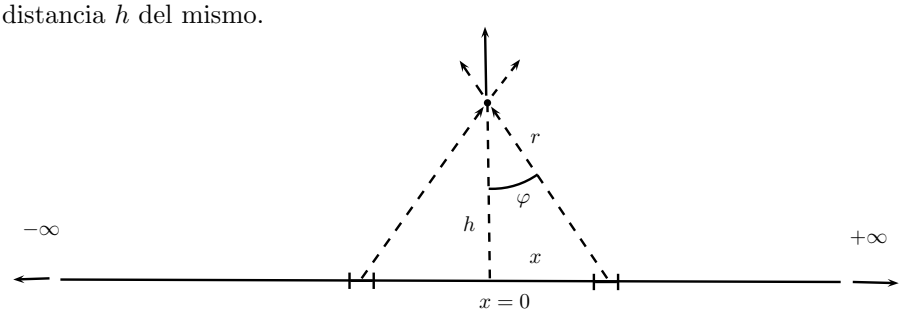
En esta integral, que sirve para conocer el valor del campo en el punto $y$, todos los términos son constantes (no varían cuando cambiamos el ángulo $\theta$) y por lo tanto:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot yR}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot yR}{(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

El campo eléctrico sólo tiene componente en la dirección $y$. Cuando $y > 0$, apunta hacia arriba, y cuando $y < 0$, el campo apunta hacia abajo. En $y = 0$ no hay campo eléctrico.

**Campo eléctrico creado por una recta infinita**

Ahora vamos a calcular el campo eléctrico que un cable de densidad lineal $\lambda$ =cte, infinitamente largo y recto crea en todos los puntos del espacio. El cable está alineado según el eje $OX$ y queremos conocer el valor del campo a una distancia $h$ del mismo.




Está claro por la simetría del problema, que en un punto a distancia $h$ del cable sólo habrá componente vertical del campo eléctrico $E_y$, porque las componentes horizontales se anulan. La intersección de la vertical que pasa por el punto en el que queremos calcular el campo con el cable lo podemos escoger como $x = 0$. Veamos cómo es el campo eléctrico que crea un pequeño segmento de longitud $dx$, que se encuentra en la posición $x$. Ese elemento de cable tiene una cantidad de carga que es igual a su longitud por la densidad lineal de carga: $dq = \lambda \cdot dx$. Está a una distancia $r = \sqrt{h^2 + x^2}$ del punto donde queremos calcular $E$. Por tanto, el campo que crea es:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda \cdot dx}{r^2}$$

Como solo necesitamos la componente $y$, la calculamos como sigue:

$$dE_y = dE\cos\varphi = dE\frac{h}{r}$$

Por tanto:

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda \cdot dx}{h^2 + x^2}\frac{h}{\sqrt{h^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda \cdot hdx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

Para conocer el valor del campo $E$ necesitamos sumar las contribuciones de cada trozo de cable, es decir, integrar la anterior expresión. La variable de integración es $x$, y sus límites de integración son $-\infty$ y $+\infty$:

$$E_y = \int_{\text{cable}} dE_y = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda \cdot hdx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

Esta integral se resuelve mediante siguiente cambio de variable:

$$x = h\tan\alpha$$
$$dx = y\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Y los límites:

$$x \to \infty \implies \alpha = \pi/2$$

$$x \to -\infty \implies \alpha = -\pi/2$$

Realizando este cambio, utilizando la variable auxiliar $\alpha$, la integral se resuelve de manera sencilla:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = ... = \frac{2}{h^2}$$

y por tanto, el campo eléctrico que crea un cable infinito, en un punto situado a distancia $h$ del mismo, es:

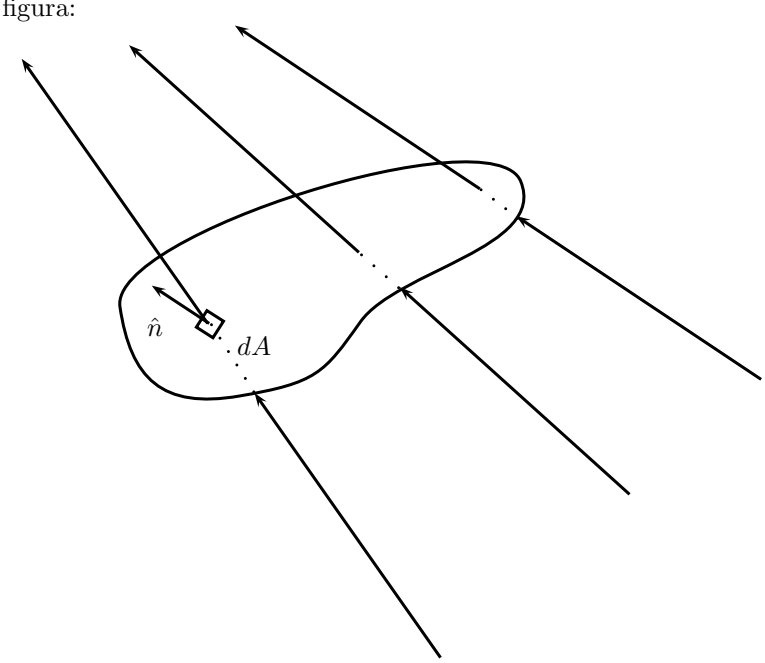
$$E_y = \frac{\lambda}{2h\pi\epsilon_0}$$

### 1.4.4 Teorema de Gauss

Estos cálculos son en general complicados y únicamente sabemos calcular el campo eléctrico creado por distribuciones donde se cumplen determinadas condiciones de simetría y la integral es relativamente sencilla.

Una manera alternativa de calcular el campo $E$ nos la proporciona el teorema de Gauss. Pero antes debemos definir una nueva magnitud, el *flujo eléctrico* $\Phi$.

Tenemos una superficie y, atravesándola, un campo $\vec{E}$, como se muestra en la figura:




La superficie la podemos dividir en pequeños elementos de área infinitesimal $dA$. Además, podemos definir un vector unitario $\hat{n}$ que es perpendicular al área en ese punto. Entonces, definimos un nuevo vector $d\vec{A} = \hat{n}dA$.

La cantidad de flujo eléctrico que atraviesa ese pequeño elemento de superficie se define como el siguiente producto escalar:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Nótese que, debido a esta definición, el resultado dependerá del ángulo que formen entre sí los vectores $d\vec{A}$ y $\vec{E}$.

Y el flujo eléctrico a través de la superficie completa es:

$$\Phi = \int_{\text{Superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Nótese que el flujo es un escalar, no tiene dirección ni sentido. Si el campo eléctrico se mide en $N/C$ (Newtons dividido por Culombio), el flujo se mide en $N \cdot m^2/C$ (Newtons por metro cuadrado partido por Culombio).

El flujo mide "cuanto campo eléctrico atraviesa una superficie".

Cuando queremos calcular el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada, existe una convención según la cual el vector $d\vec{A}$ se toma hacia afuera del espacio que la superficie encierra. Además se utiliza otro símbolo para la integral a lo largo de superficies cerradas:

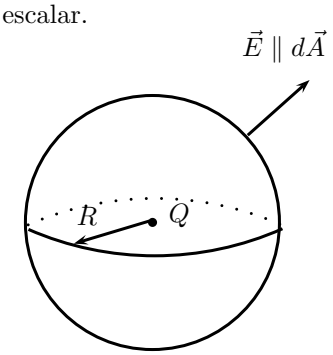
$$\Phi = \oint_{\text{superf.cerrada}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

**Ejemplo: Campo $E$ creado por una carga puntual** Tenemos una carga puntual $Q$. ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una superficie esférica de radio $R$, que tiene la carga $Q$ en su centro?

Utilizaremos la definición:

$$\Phi = \oint_{\text{Esfera}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Para hacer este cálculo debemos conocer, en primer lugar, el valor del campo $\vec{E}$ en la superficie de la esfera, y después, el ángulo que forma con los $d\vec{A}$ para hacer el producto escalar.




Ha de tenerse en cuenta que el campo eléctrico en la superficie de la esfera es radial, y por lo tanto paralelo a los vectores $d\vec{A}$ en todos sus puntos. En consecuencia, el producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E\, dA$. Además, en todos esos puntos, la distancia a la carga es la misma, $R$, por tanto, el campo en valor absoluto es constante y vale:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2} \implies$$

$$\Phi = \oint_{\text{Esfera}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = \oint_{\text{Esfera}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2} dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}\oint_{\text{Esfera}} dA$$

La integral que queda no es sino el área total de la esfera de radio R, es decir:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Obsérvese que si hubiésemos escogido una esfera de otro tamaño, el resultado hubiese sido el mismo (hemos obtenido un valor de $\Phi$ que no depende del radio), porque la cantidad de líneas de campo que salen de la esfera no depende del radio de la misma. Obsérvese también que si la superficie escogida no hubiese sido esférica sino otra superficie cerrada de forma irregular, el resultado hubiese sido idéntico (aunque el cálculo mucho más dificil, por el producto $\vec{E}\cdot d\vec{A}$) porque la cantidad de líneas de campo que la atravesarían sería la misma. El resultado sólo se modificaría si cambiasemos la cantidad de eléctrica en el interior de la superficie.

El **Teorema de Gauss** nos dice que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al cociente entre la carga que haya encerrada en el interior de dicha superficie y $\epsilon_0$.

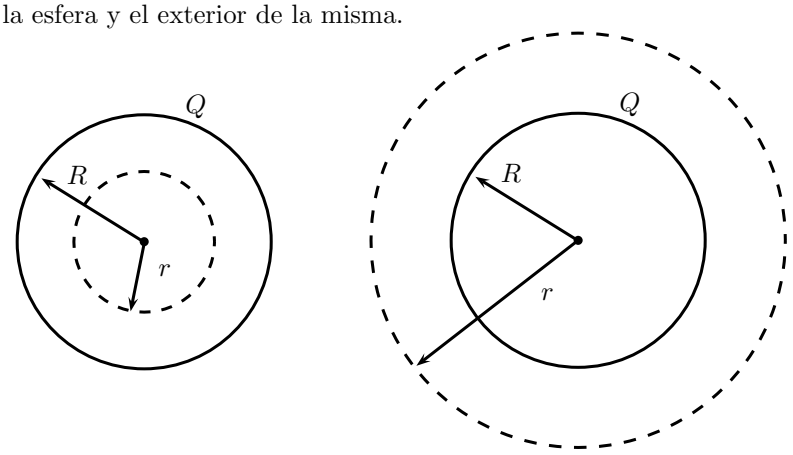
$$\boxed{\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}}$$

### Ejemplos de Aplicación del Teorema de Gauss

El teorema de Gauss nos permite calcular de manera indirecta el campo eléctrico en algunas circunstancias. En concreto, es necesario que se den ciertas condiciones de simetría, que faciliten el cálculo del producto escalar $\vec{E}\cdot d\vec{A}$, así como que simplifiquen la integral de superficie.

**Esfera conductora cargada** Por ejemplo, vamos a calcular ahora el campo eléctrico creado por una esfera conductora con radio $R$ y carga $Q$. Y utilizando el teorema de Gauss lo determinaremos en cualquier punto del espacio.

Para empezar, tenemos dos zonas bien delimitadas del espacio: El interior de la esfera y el exterior de la misma.




Nótese que el campo eléctrico tiene simetría radial, el campo tiene dirección radial, y por tanto, si nos imaginamos una superficie esférica que comparta centro con la esfera conductora, siempre se cumplirá que $\vec{E} \parallel d\vec{A} \implies \vec{E}d\vec{A} = EdA$.

Vamos a empezar calculando el campo $E$ en el interior de la esfera conductora. Como es de material conductor, la carga que posee, $Q$, queda ubicada en la superficie de la esfera. Para calcular el campo, trazamos una superficie esférica imaginaria, de radio $r < R$, como se muestra en el lado izquierdo de la figura. Calculamos el flujo eléctrico (i) utilizando su definición y (ii) utilizando

el teorema de Gauss. Como la carga se ha ido a la superficie, no hay carga eléctrica en el interior de la esfera imaginaria de radio $r$.

$$\left.\begin{array}{c}\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E dA \\ \Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow E = 0$$

Es decir, el campo eléctrico en el interior del conductor es cero, como ya se dijo anteriormente en este tema.

Pasamos a la segunda zona: fuera de la superficie (lado derecho de la figura). Trazamos una esfera imaginaria de radio $r > R$. Calculamos de nuevo el flujo utilizando las dos vías, teniendo en cuenta que ahora toda la carga $Q$ está en el interior de la superficie esférica de radio $r$:

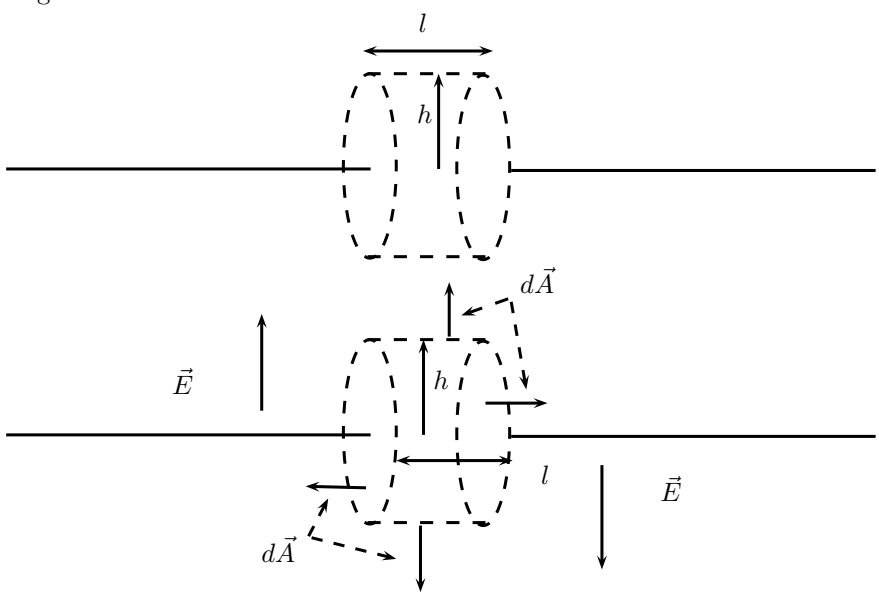
$$\left.\begin{array}{c}\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E dA = E4\pi r^2 \\ \Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}\end{array}\right\} \Longrightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Por lo tanto, fuera de la esfera, tenemos el mismo campo eléctrico que habría si hubiese una carga puntual en el centro. El resultado es:

$$\left.\begin{array}{cc} E = 0 & \text{Si } r < R \\ E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} & \text{Si } r > R\end{array}\right\}$$

**Recta infinita** Pasamos ahora a repetir el cálculo del campo eléctrico creado por un cable recto, infinito, con densidad lineal de carga $\lambda$ constante. Queremos conocer el valor del campo a una distancia $h$ del cable.

En este caso, como conocemos que el campo eléctrico tiene que tener simetría radial cilíndrica, vamos a trazar una superficie imaginaria cilíndrica, como se ve en la figura.




Calculamos el flujo aplicando la definición

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{\text{cara revoluc.}} E dA = E\int_{\text{cara revoluc.}} dA$$

donde se ha tenido en cuenta que:

- $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ en las 'tapas' del cilindro, porque allí el campo es perpendicular a $d\vec{A}$,

- en la cara de revolución del cilindro, el campo $\vec{E}$ es paralelo al vector $d\vec{A}$, por tanto, su producto escalar es $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$,

- y que el módulo del campo vale lo mismo en todos los puntos de la cara de revolución del cilindro.

Por tanto,

$$\Phi = E2\pi hl$$

Por otro lado, aplicamos el teorema de Gauss, para calcular de otra manera el flujo. Necesitamos conocer la cantidad de carga que hay en el interior del cilindro imaginario que hemos dibujado. Como tiene longitud $l$, y el cable tiene densidad lineal de carga $\lambda$, entonces la carga eléctrica en el interior del cilindro es $\lambda l$. Por tanto, según Gauss, el flujo vale:

$$\Phi = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

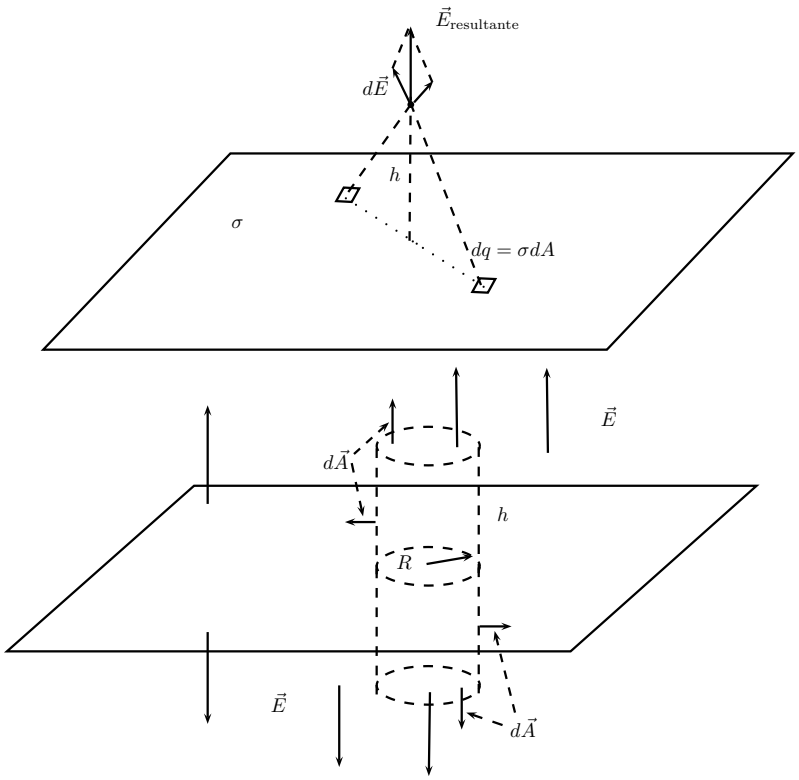
Igualando las dos últimas ecuaciones despejamos $E$:

$$\left.\begin{array}{r} \Phi = E2\pi hl \\ \Phi = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \end{array}\right\} \Longrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h}$$

Que es el mismo resultado que se obtuvo cuando se calculó el campo eléctrico para este mismo problema, cuando aún no habíamos estudiado el teorema de Gauss.

**Plano infinito** Ahora estudiaremos el campo eléctrico creado por un plano infinito, con densidad superficial de carga $\sigma$ constante. En primer lugar, vemos por el esquema siguiente que el campo resultante tiene la dirección perpendicular al plano. Como es infinito, en cualquier punto que esté a la distancia $h$ el campo $E$ valdrá lo mismo.

Para calcular el valor del campo, vamos a utilizar de nuevo el teorema de Gauss. Definimos una superficie cilíndrica como se muestra en la figura, que tenga altura $2h$, de manera que su cara superior esté paralela al plano y a distancia $h$ del mismo. El cilindro tiene radio arbitrario $R$.




Calculamos el flujo utilizando la definición:

$$\Phi = \oint_{\text{cilindro}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{cara lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{cara inferior}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{cara superior}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{E}$ es perpendicular a $d\vec{A}$ en la cara lateral (de revolución) del cilindro, y que es paralelo en las caras superior e inferior, sabemos que:

- $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ en la cara lateral
- $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$ en la cara superior
- $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$ en la cara inferior
- $E$ es constante en todos los puntos de la cara superior
- $E$ es constante en todos los puntos de la cara inferior
- $E$ es vale lo mismo (en módulo!) en la cara superior e inferior

Es decir, el flujo:

$$\Phi = \int_{\text{cara inferior}} EdA + \int_{\text{cara superior}} EdA = 2E \int_{\text{una de las caras}} dA = 2E\pi R^2$$

Por otro lado, calculamos el flujo utilizando el teorema de Gauss. Como dentro del cilindro hay una superficie del plano igual a $\pi R^2$, la carga que hay dentro del cilindro imaginario es $Q_{\text{int}} = \sigma\pi R^2$.

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0}$$

Igualando las dos últimas expresiones despejamos $E$:

$$\left.\begin{array}{r} \Phi = 2\pi R^2 E \\ \Phi = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0} \end{array}\right\} \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Obsérvese que es un resultado sorprendente, al menos en un primer momento, puesto que no depende de la distancia al plano. El campo eléctrico es el mismo en todos los puntos del espacio, y vale lo mismo si estamos muy cerca o muy lejos del plano.

En una placa cuadrada, de lado $l$, y con densidad superficial de carga $\sigma$, el resultado que hemos obtenido será una buena aproximación cuando estemos a distancias de la placa pequeñas comparadas con $l$.

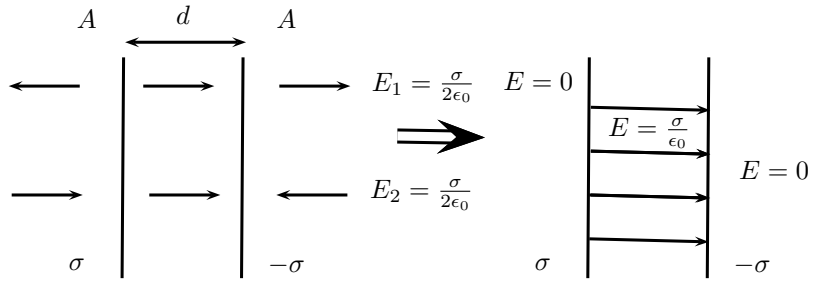
Ejercicios 5 y 6.

### 1.4.5 Energía potencial electrostática en cargas no puntuales

Consideremos ahora una pareja de placas conductoras planas, orientadas en paralelo, con densidades superficiales de carga $\sigma$ (placa 1) y $-\sigma$ (placa 2), respectivamente. Las placas tienen una superficie $A$. Para calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio, tenemos que utilizar el principio de superposición, y tomamos el campo que crea un plano, tal y como hemos calculado antes:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Eso sí, es importante tener en cuenta el sentido del campo que crea cada una de las placas en cada punto del espacio. Definimos tres zonas: A la izquierda de la placa con carga positiva, a la derecha de la placa con carga negativa, y en la zona intermedia.



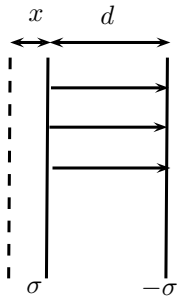

Al superponer los campos eléctricos creados por ambas placas, observamos que el campo resultante se anula en la parte exterior a las placas, mientras que en la zona intermedia, los campos se suman, y tenemos:

$$E = \begin{cases} 0 & \text{Fuera de las placas} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} & \text{Entre las placas} \end{cases}$$

La diferencia de potencial entre las placas 1 y 2 se calcula fácilmente teniendo en cuenta que $\vec{E}$ es constante:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{x} = Ed$$

Para estudiar la energía potencial electrostática que almacena este sistema, estudiaremos el trabajo que se debe realizar para alejar la placa con carga positiva una distancia $x$.




Como las dos placas, según la Ley de Coulomb, se atraen, tendremos que gastar energía en alejarlas. La placa 1, de superficie $A$ y densidad de carga $\sigma$, tiene carga $Q = A\sigma$. La fuerza que se debe realizar ha de ser al menos igual (en magnitud) a la electrostática. La fuerza electrostática es el valor de la carga multiplicado por el campo eléctrico. Sin embargo, las cargas que posee la placa 1, que es conductora, están justo en su superficie, y el campo que perciben es el promedio del que hay en la zona entre placas ($E$) y el que hay en el interior de la placa 1 (donde el campo es 0, por ser conductora), es decir, el campo que sienten las cargas es, en promedio, $(1/2)E$. Por tanto, la fuerza es:

$$F = \frac{1}{2}QE$$

El trabajo lo calculamos como la integral:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = Fx = \frac{1}{2}QEx$$

resultado que hemos obtenido teniendo en cuenta que la fuerza es constante y paralela al vector desplazamiento. Manipulando la ecuación alcanzamos otra expresión:

$$W = \frac{1}{2}QEx = \frac{1}{2}\sigma AEx\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 Ax$$

El término $Ax$ es el volumen que hemos ganado. El trabajo que se debe realizar por unidad de volumen es:

$$u = \frac{\text{Trabajo}}{\text{Unidad de volumen}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

$u$ es la *densidad de energía electrostática*, y se mide en Julios por metro cúbico. La *Energía Potencial Electrostática* $U$ se calcula como la integral de la densidad de energía en todo el volumen:

$$U = \int_{\text{Vol}} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\text{Vol}$$

En el caso del sistema de dos placas con densidades de carga opuestas, al hacer esta integral en todo el espacio, tenemos en cuenta que únicamente contribuye la zona entre placas: Fuera de las mismas $E = 0$, y por tanto, esa zona

del espacio no contribuye en la integral de arriba. En la zona entre placas, $E = \sigma/\epsilon_0$=cte, con lo que

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 A d$$

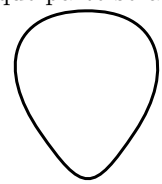
La diferencia de potencial entre las placas es $V = Ed$. Por otro lado, la carga es $Q = \sigma A$. Por tanto, $U$ nos queda así;

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{\sigma A}{\epsilon_0} E d = \frac{1}{2} Q V$$

Esta es la energía que ha sido necesaria para situar donde están. Y esa energía ahora queda almacenada como energía potencial electrostática del sistema.

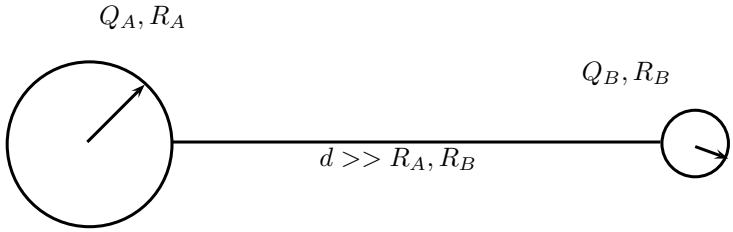
## 1.5 Curvatura y campo eléctrico

Cuando un objeto conductor de forma irregular está cargado eléctricamente, ¿en qué parte será mayor el campo eléctrico?



Por ejemplo, en el objeto de la figura, cabe preguntarse dónde irá a parar la carga. Ya sabemos que se distribuye en la superficie, pero no sabemos cómo lo hará. Tampoco sabemos en qué zona el campo eléctrico será más intenso, si cerca de la zona de alta curvatura (abajo, donde es más picudo) o donde la curvatura es más baja.

Para poder hacernos una idea de cómo se distribuyen las cargas y los campos eléctricos, estudiaremos el siguiente objeto cargado:




Tenemos dos esferas de material conductor, cargadas, unidas por un cable conductor. La esfera $A$, de la izquierda, es mayor que la derecha, $B$. Como están conectadas por un conductor, quiere decir que el potencial de las dos esferas es el mismo. Al estar tan alejadas entre sí, podemos calcular el potencial en la superficie de cada una de ellas sin tener en cuenta la influencia de la otra.

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_A}{R_A}$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_B}{R_B}$$

$$V_A = V_B \implies \frac{Q_A}{R_A} = \frac{Q_B}{R_B}$$

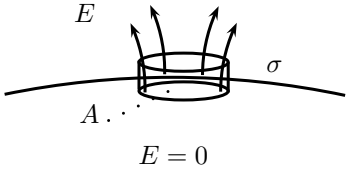
Por tanto, la esfera de mayor tamaño tiene más carga. Sin embargo esto no quiere decir necesariamente que el campo eléctrico en su superficie sea mayor. Veamos cómo son las densidades superficiales de carga de ambas esferas:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_A = \frac{Q_A}{4\pi R_A^2} \\ \sigma_B = \frac{Q_B}{4\pi R_B^2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{Q_A}{Q_B}\frac{R_B^2}{R_A^2} = \frac{R_A}{R_B}$$

donde se ha tenido en cuenta que $Q_A/Q_B = R_A/R_B$.

Entonces, aunque en el objeto de la figura, la carga se encuentra mayoritariamente en la esfera de mayor radio, en la de menor radio la densidad de carga es mayor.

Realizamos una ampliación de una sección de una de las esferas:




Utilizando la ley de Gauss podemos calcular el campo eléctrico justo en la superficie. Para ello trazamos una superficie imaginaria cilíndrica, de tal manera que la tapa superior, de área $A$, quede fuera de la esfera y la tapa inferior quede en el interior. El cilindro es muy achatado (como una moneda) para que no haya flujo eléctrico por la cara lateral. Entonces sólo hay flujo eléctrico en la cara superior (en la inferior no hay, porque está dentro de la esfera y por tanto $E = 0$).

Utilizando la ley de Gauss obtenemos:

$$AE = \frac{A\sigma}{\epsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Por tanto, el campo eléctrico será mayor en la superficie de la esfera de menor radio, porque es proporcional a la densidad de carga y, como hemos deducido antes, la densidad de carga es mayor en la esfera más pequeña.

Esta misma idea se puede aplicar a objetos conductores irregulares. La densidad de carga será mayor siempre en las zonas con menor radio de curvatura, y por tanto será en esas zonas donde el campo eléctrico será más intenso. Sin embargo, en las zonas más planas (de mayor radio de curvatura), la densidad de carga es más baja y el campo también.

## 1.6 Capacidad y Condensadores

La capacidad ($C$) es una magnitud que se emplea a menudo en electricidad y que se puede definir para cualquier objeto como el cociente entre su carga eléctrica y su potencial:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Por ejemplo, en una esfera conductora, que tiene radio $R$ y carga $Q$, conocemos el potencial en su superficie y por lo tanto podemos calcular la capacidad:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \Longrightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Vemos que, aunque se define como el cociente entre carga y potencial, el resultado no depende de lo uno ni de lo otro, sino que es una función solamente de la geometría del sistema (en este caso depende del radio de la esfera).

La capacidad se mide en Faradios ($F$), en honor al gran científico británico Michael Faraday. Un Faradio equivale a un Culombio por Voltio.

Cuando se trabaja con un sistema donde hay dos componentes con carga, en lugar de utilizar el potencial se utiliza la diferencia de potenciales. Por ejemplo, la capacidad del sistema, ya estudiado, compuesto por dos placas de densidades de carga opuestas, superficie $A$ y separadas una distancia $d$ se calcula como el cociente entre la carga de una de las placas y la diferencia de potencial entre ambas. El resultado ha de ser positivo.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A\sigma}{Ed} = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

Para obtener esta expresión se han utilizado las relaciones ya conocidas:

$$Q = A\sigma, \quad V = Ed, \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Destacamos de nuevo el hecho de que el resultado no dependa de la carga ni del potencial, sólo de la geometría (en este caso, de la superficie de cada placa y de la separación entre ellas).

El sistema de un par de placas paralelas con cargas opuestas se denomina **condensador**. La capacidad de un condensador (u otro objeto) es la magnitud que relaciona su diferencia de potencial y la carga que almacena. Si en un condensador de $1000\mu F$ se establece una diferencia de potencial $V = 10V$, quiere decir que en sus placas ha almacenado una cantidad de carga $Q = CV = 1000\mu F \cdot 10V = 10^{-2}$ C.

La energía electrostática que almacena un condensador se puede calcular de varias maneras, teniendo en cuenta la relación entre capacidad, carga y potencial. Antes hemos visto la primera de las maneras de calcularla:

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{V}$$

Las tres ecuaciones son equivalentes.

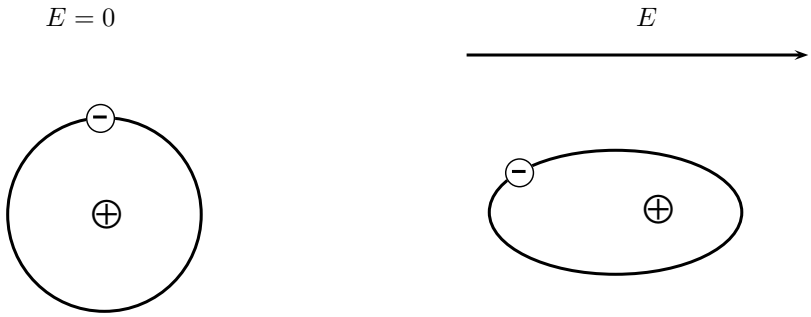
Ejercicio 9

## 1.7 Materiales dieléctricos

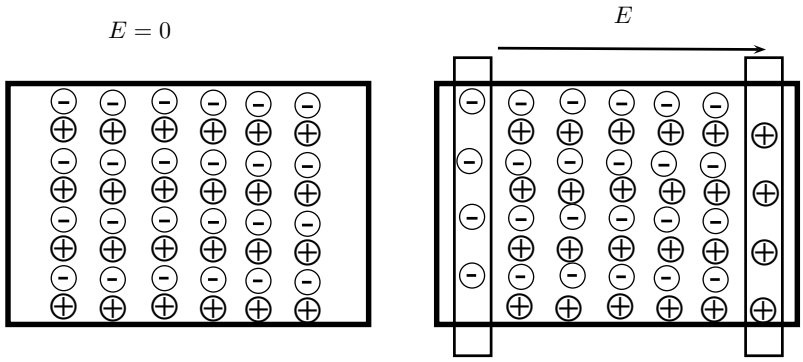
Los materiales aislantes no permiten el flujo de cargas eléctricas en su interior, puesto que sus electrones están firmemente anclados a los átomos o a las redes atómicas. Un electrón libre en el interior de un material aislante, sometido a un campo eléctrico, se desplazaría por la acción del mismo, pero no tardaría en colisionar con la estructura atómica hasta disipar su energía cinética.

Sin embargo, el hecho de que no se transporten cargas eléctricas en el material no quiere decir que no pueda adquirir carga eléctrica. Es más, al igual que los conductores, podemos inducir una polarización en él. En efecto, ante la presencia de un campo eléctrico, la estructura atómica puede cambiar ligeramente, ya que los núcleos de los átomos (con carga positiva) y sus cortezas electrónicas

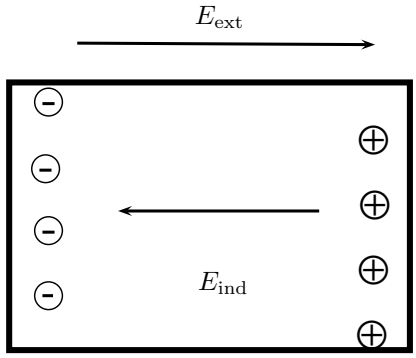
(con carga negativa) se deslizarían ligeramente en sentidos opuestos, como se indica en la figura.




Si tenemos un bloque de un material aislante sometido a un campo eléctrico, podemos entender qué le sucede recurriendo a este argumento de los desplazamientos a nivel electrónico.




Cuando no hay campo, las cargas eléctricas positivas y negativas están repartidas de forma homogénea por todo el aislante. Sin embargo, cuando actúa un campo, las cargas positivas se desplazan ligeramente en un sentido y las negativas en otro. En la parte central del aislante, como podemos ver, el material sigue siendo neutro. Pero en las superficies aparece una carga inducida. Por encontrarse en las superficies hablamos de densidad superficial de carga inducida $\sigma_{\text{ind}}$. En el ejemplo de la figura, el material quedaría con carga positiva en su lado derecho y con carga negativa en el izquierdo (zonas señaladas en la figura de la derecha). Por supuesto, el material sigue siendo globalmente neutro.




A consecuencia de la aparición de estas cargas inducidas, tenemos un campo eléctrico en el interior del aislante, que se denomina *campo eléctrico inducido* que

tiene el sentido contrario al campo eléctrico externo. En los metales, se desplaza tal cantidad de cargas que el campo inducido llega a anular el externo y por tanto en el interior del material no hay campo. Pero ahora estamos trabajando con aislantes, y el campo inducido no es lo suficientemente grande como para compensar el externo, sino que será en general menor en magnitud. Por tanto, el campo eléctrico total que habrá en el interior no es cero en aislantes.

Como suma vectorial

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{ind}}$$

Como magnitud resultante

$$E_{\text{ind}} < E_{\text{ext}} \quad \Longrightarrow \quad E_{\text{tot}} = E_{\text{ext}} - E_{\text{ind}} > 0$$

Normalmente al campo externo también se le llama campo libre $E_{\text{libre}}$

A los materiales que exhiben este comportamiento se les denomina aislantes o dieléctricos, y se caracterizan por su **constante dieléctrica** $K$. Es una propiedad de cada material aislante (o dieléctrico) y se define así:

$$K = \frac{E_{\text{ext}}}{E_{\text{ext}} - E_{\text{ind}}} \Longrightarrow$$

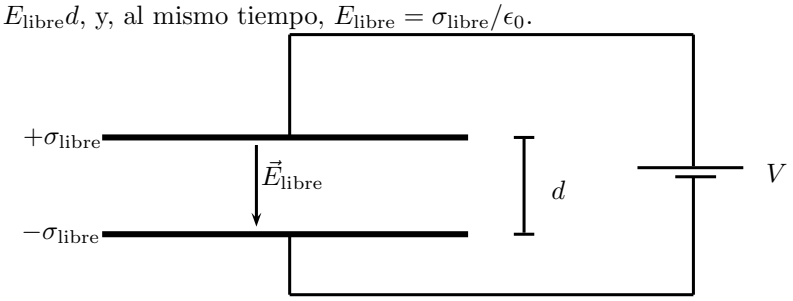
$$\boxed{E_{\text{tot}} = \frac{E_{\text{ext}}}{K}}$$

A veces, por notación, se escribe $E$ para el campo total y $E_{\text{libre}}$ para el externo, por tanto:

$$E = \frac{E_{\text{libre}}}{K}$$

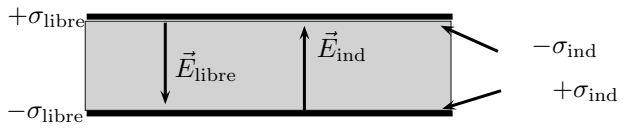
Veamos a continuación un ejemplo con un condensador.

Tenemos un condensador formado por dos placas conductoras paralelas separadas por una distancia $d$. Conectado a una fuente de alimentación, establecemos una diferencia de potencial entre las placas $V$, de manera que éstas adquieren carga eléctrica. La placa que esté a mayor potencial tendrá carga $+Q_{\text{libre}}$ y la otra $-Q_{\text{libre}}$. Por tanto, las densidades superficiales de carga serán $\pm\sigma_{\text{libre}}$. En la zona entre placas, el campo eléctrico es $\vec{E}_{\text{libre}}$, de tal manera que $V = E_{\text{libre}}d$, y, al mismo tiempo, $E_{\text{libre}} = \sigma_{\text{libre}}/\epsilon_0$.




Una vez que el condensador ha sido cargado, *se desconecta* la fuente de alimentación que establece la diferencia de potencial $V$. Obsérvese que la carga está atrapada en las placas y no se irá. Por lo tanto, mientras no hagamos nada, el campo eléctrico y la diferencia de potencial no sufrirán cambios.

Ahora introducimos entre las placas un material dieléctrico o aislante que tiene constante dieléctrica $K$. Como hay un campo eléctrico en esa región, se induce la aparición de densidades de carga $\pm\sigma_{\text{ind}}$ en las superficies del dieléctrico:




La magnitud del campo eléctrico inducido es $E_{\text{ind}} = \sigma_{\text{ind}}/\epsilon_0$.

El campo total es, en magnitud $E = E_{\text{libre}} - E_{\text{ind}} = E_{\text{libre}}/K$.

Eso quiere decir que el campo inducido vale $E_{\text{ind}} = (1-1/K)E_{\text{libre}}$. Es decir, tenemos dos expresiones para el campo inducido, de donde obtenemos $\sigma_{\text{ind}}$:

$$\left.\begin{array}{c} E_{\text{ind}} = \frac{\sigma_{\text{ind}}}{\epsilon_0} \\ E_{\text{ind}} = \left(1 - \frac{1}{K}\right) E_{\text{libre}} = \left(1 - \frac{1}{K}\right) \frac{\sigma_{\text{libre}}}{\epsilon_0} \end{array}\right\} \implies \sigma_{\text{ind}} = \left(1 - \frac{1}{K}\right) \sigma_{\text{libre}}$$

Es decir, si conocemos el campo libre y la constante dieléctrica, podemos calcular inmediatamente tanto el campo total como el campo inducido.

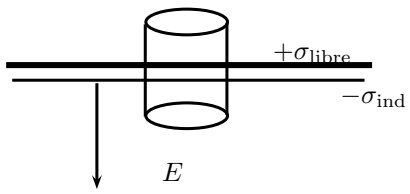
Si conocemos la densidad de carga (libre) y la constante dieléctrica, podemos calcular la densidad de carga inducida en la superficie del dieléctrico.

### 1.7.1 Ley de Gauss y cargas inducidas

La ley de Gauss también se puede aplicar para calcular campos eléctricos en dieléctricos con densidades inducidas de carga. Para ello, se ha de definir una superficie cerrada a través de la cual queramos determinar el flujo eléctrico, sabiendo que será igual a la suma de *todas las cargas* en el interior de dicha superficie dividido por $\epsilon_0$.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum Q_{\text{int,tot}}}{\epsilon_0}$$

Tomaremos, para demostrar la validez de la ley de Gauss, una superficie cilíndrica que encierre la placa superior del condensador (donde hay $+\sigma_{\text{libre}}$) y la superficie superior del dieléctrico (donde hay $-\sigma_{\text{ind}}$).




Si $r$ es el radio del cilindro, entonces, teniendo en cuenta que encima de la placa superior el campo es cero, que en el interior el campo es $\vec{E}$, y que en la cara lateral del cilindro el campo es cero o perpendicular a $d\vec{A}$, tenemos que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\pi r^2$$

Por otra parte, tenemos que tomar todas las cargas, esto incluye a las libres y a las inducidas. Por tanto $Q_{\text{int,tot}} = \pi r^2(\sigma_{\text{libre}} - \sigma_{\text{ind}})$. Entonces:

$$E\pi r^2 = \frac{\pi r^2(\sigma_{\text{libre}} - \sigma_{\text{ind}})}{\epsilon_0} \implies \quad E = \frac{\sigma_{\text{libre}} - \sigma_{\text{ind}}}{\epsilon_0}$$

Como conocemos $K$, podemos eliminar $\sigma_{\text{ind}}$ de la ecuación anterior:

$$\left.\begin{array}{r}\sigma_{\text{ind}} = \sigma_{\text{libre}}\left(1-\frac{1}{K}\right)\\ E = \frac{\sigma_{\text{libre}}-\sigma_{\text{ind}}}{\epsilon_0}\end{array}\right\} \Longrightarrow E = \frac{\sigma_{\text{libre}}}{K\epsilon_0} = \frac{E_{\text{libre}}}{K}$$

Es decir, el mismo valor que habíamos obtenido antes. Esta ecuación también nos dice que existe otra manera de aplicar la ley de Gauss, también válida con carácter general:

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{\sum Q_{\text{int,tot}}}{\epsilon_0} = \frac{\sum Q_{\text{int,libres}}}{K\epsilon_0}}$$

es decir, tomando únicamente las cargas libres (las no inducidas) pero dividiendo por $K$. En el vacío $K = 1$.

### 1.7.2 Dieléctricos en condensadores

Tenemos en el vacío un condensador de placas de área $A$ y separadas una distancia $d$.

Al introducir un dieléctrico con constante $K$ en un condensador, el campo eléctrico en el interior se va a reducir en un factor $K$.

$$E_{\text{tras introducir el aislante}} = \frac{E_{\text{antes de introducir el aislante}}}{K}$$

Si el condensador está aislado, no conectado a una fuente de alimentación externa que mantenga el potencial constante, entonces la carga que hay en las placas no cambia al introducir el aislante. Pero el potencial si que cambia: $V = E\cdot d$. Si $E$ disminuye un factor $K$, y $d$ permanece constante, es obvio que $V$ disminuye un factor $K$ al introducir el dieléctrico.

La capacidad del condensador también cambia: $C = Q/V$, si la carga de las placas no ha cambiado $Q = cte$ y $V$ se ha reducido un factor $K$, quiere decir que la capacidad se multiplica por $K$ con respecto a su valor en el vacío. Por tanto, ahora la expresión que teníamos antes para la capacidad como función de la geometría del sistema ($C = A\epsilon_0/d$) no nos sirve, porque no tiene en cuenta la existencia de un dieléctrico. Por tanto, la ajustamos introduciendo el factor $K$ adecuadamente:

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d}K$$

La energía potencial electrostática $U = (1/2)QV$, en cambio, disminuye por la misma razón un factor $K$. Para que esto sea compatible con la definición de densidad de energía $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, hay que corregir esta última expresión. Téngase en cuenta que sabemos que $U$ (y por tanto $u$) ha disminuído en un factor $K$. Pero echando un vistazo a $u$, vemos que depende de $E^2$, y por tanto nos saldría que disminuye por $K^2$. Por tanto, corregimos la expresión de la densidad de energía cuando no estamos en el vacío:

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2$$

Otro caso de estudio interesante es aquél en el que, con la fuente de alimentación conectada, introducimos el dieléctrico. Ahora el potencial entre las placas es forzosamente constante, pero la cantidad de carga eléctrica en cada placa ya no lo es.

Ejercicios 10, 11, 12.

### 1.7.3 Rotura dieléctrica

Cuando el campo eléctrico aplicado sobre el dieléctrico es muy intenso, la fuerza eléctrica que actúa sobre las partículas (cargadas) que lo constituyen es tan alta que pasan de estar *ancladas* a poder moverse. Entonces sí que se transportan cargas eléctricas aunque el material, sobre el papel, sea un aislante.

Uno de los mejores aislantes es el aire. Sin embargo a veces sí que vemos, oímos o sentimos que las cargas eléctricas viajan por el aire. A veces al acercar la punta de los dedos a un objeto que tiene carga eléctrica vemos como salta una chispa.

El aire está compuesto fundamentalmente de moléculas de $O_2$ y $N_2$. Si existe un campo eléctrico, y hay un electrón libre, este se verá acelerado, pero tarde o temprano colisionará con una molécula de oxígeno o nitrógeno. Si, como consecuencia de la energía transferida desde el campo eléctrico, el electrón tiene suficiente energía cinética, entonces durante la colisión se produce una *rotura* del átomo o molécula, puesto que se ioniza al arrancársele algunos electrones. Estos nuevos electrones, a su vez, han quedado desligados del átomo y por tanto el campo eléctrico los acelerará, y cada uno de ellos podrá ocasionar la rotura de otro átomo, con lo que se produce un efecto en cascada. Cuando esto sucede, decimos que se ha producido la rotura dieléctrica del medio (aire), y hay un transporte neto de carga en la dirección del campo eléctrico. Cuando los iones (átomos que han perdido algún electrón) capturan un electrón para volver a ser neutros (se dice que se recombina), liberan una pequeña cantidad de energía. Si muchos iones se están recombinando simultáneamente, esa liberación de energía la podemos percibir como una chispa.

Para que el proceso descrito en el párrafo anterior se pueda llevar a cabo se necesitan campos eléctricos altos. Veamos cómo lo podemos cuantificar.

En el aire, a $T = 300$ K, se sabe que un electrón recorre, entre dos colisiones consecutivas, una distancia de $\Delta x = 1$ $\mu$m. Para que logre ionizar el oxígeno o el nitrógeno hace falta que tenga una energía de al menos 10 $eV$[1] Por lo tanto, en la distancia entre dos choques consecutivos debe haber una diferencia de potencial de $\Delta V = 10$ V. Por lo tanto, el campo eléctrico es:

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{10 \text{ V}}{10^{-6} \text{ m}} = 10^7 \text{ V/m}$$

En la práctica, debido (entre otras cosas) a que la distancia de 1 $\mu$m es sólo un promedio y puede ser distinto, el campo eléctrico que se requiere para provocar el efecto cascada es algo menor que el calculado, puesto que basta con un campo de $E = 3 \cdot 10^6$ V/m.

Es decir, cuando una chispa viaja, por ejemplo desde le pomo de una puerta hasta la punta de los dedos, quiere decir que el campo eléctrico es de aproximadamente tres millones de voltios por metro. Si la chispa recorre una distancia de 3 mm, quiere decir que entre nosotros y la puerta hay una diferencia de potencial de $\Delta V = 3 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \simeq 10000$ V.

[1] 1 eV o un electrón-voltio es la energía cinética que un electrón en reposo adquiere si se le sumete a un potencial de 1V, es decir, 1 eV = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C·1 V = $1.6 \cdot 10^{-19}$ J.

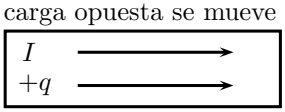
## 1.8 Circuitos

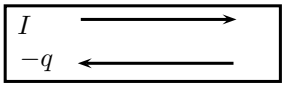
El movimiento de cargas en el interior de un material da lugar a la definición de corriente o intensidad $I$. La corriente es la cantidad de carga ($Q$) que atraviesa una superficie por unidad de tiempo ($t$).

$$I = \frac{Q}{t}$$

Por lo tanto se mide en Culombios por segundo ($C/S$) o, lo que es lo mismo, en *Amperios* ($A$).

Como la carga eléctrica tiene signo, pueden moverse cargas positivas y negativas. Desde el punto de vista de la corriente eléctrica, una partícula con carga positiva, moviéndose de izquierda a derecha supone que la intensidad tiene el sentido de izquierda a derecha. El mismo resultado se obtiene si una partícula con carga opuesta se mueve hacia la izquierda.




En los circuitos eléctricos, se sabe que las partículas que se mueven son los electrones. Aunque a efectos prácticos esto es indiferente.

Cuando una partícula cargada se mueve en una dirección y sentido determinados, es porque existe una diferencia de potencial. Una carga positiva se mueve siempre desde las zonas de potencial alto hasta las zonas de bajo potencial. La **Ley de Ohm** establece una relación entre la intensidad eléctrica y el potencial.

### 1.8.1 Ley de Ohm

En los conductores, como por ejemplo el cobre, existe una red atómica fija, de la cual existen algunos electrones que se mueven libremente (alrededor de $n = 10^{29}$ por metro cúbico). Cuando no están sometidos a ninguna fuerza, la energía cinética de estos electrones depende de la temperatura: se sabe que su velocidad térmica, promediada, es de aproximadamente $\langle v_e \rangle \sim 10^6$ m/s. Pero es una velocidad promediada, en todas las direcciones, y además los electrones van colisionando contra la red de átomos y, cada vez que se produce un choque de un electrón, cambia la dirección en que se mueve. El tiempo promedio entre colisiones es $\tau \sim 3 \cdot 10^{-19}$ s.

Si aplicamos un campo eléctrico ($E$), estos electrones si que sentirán una fuerza y se verán por tanto acelerados:

$$F = q_e E, \quad a = \frac{F}{m_e}$$

donde $q_e$ es la carga del electrón y $m_e$ su masa.

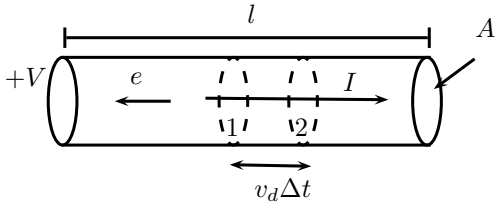
Como el electrón recorre una distancia muy pequeña entre dos colisiones consecutivas, el campo puede considerarse constante, y por lo tanto la fuerza

y aceleración también. Con aceleración constante, la velocidad de deriva que alcanza el electrón es la aceleración multiplicada por el tiempo entre colisiones

$$v_d = a\tau = \frac{q_e E}{m_e}\tau$$

Esta es la velocidad de deriva, ocasionada por un campo eléctrico, que no debe confundirse con la velocidad por agitación térmica. Por hacer números, veamos qué velocidad de deriva tendrían los electrones en un cable de 10 m entre cuyos extremos se establece una diferencia de potencial de 10 V. Tendríamos, en promedio, un campo eléctrico de $E \simeq 1$ V/m. Introduciendo el valor del tiempo entre colisiones ($\tau = 3 \cdot 10^{-19}$ s), la carga del electrón ($q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C) y su masa ($9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg), tenemos una velocidad de deriva de aproximadamente $v_d = 5 \cdot 10^{-3}$ m/s. Una cantidad ridícula comparada con la velocidad de agitación térmica. Para recorrer el cable de 10 m, el electrón tardaría ¡media hora!

Tomaremos ahora un cuerpo de longitud $l$ y sección $A$ entre cuyos extremos establecemos una diferencia de potencial $V$. El campo eléctrico es aproximadamente $E = V/l$. Un electrón recorre, en un tiempo $\Delta t = 1s$, una distancia $d = 1$ s $\cdot v_d$. El volumen entre las áreas marcadas con líneas discontínuas (caras 1 y 2) es $Vol = Av_d$. Si hay $n$ electrones móviles por metro cúbico, quiere decir que en la zona señalada hay $nAv_d$ electrones móviles. Todos esos electrones atravesarán, en el tiempo $\Delta t = 1s$, la superficie 1.




Entonces, la cantidad de carga eléctrica que, por segundo, atraviesa la superficie 1 es el número de electrones que hay en la zona marcada, multiplicado por la carga eléctrica de los electrones. Esa es la intensidad, por definición: $I = Av_d n q_e$. Además, conocemos la expresión de la velocidad de deriva $v_d$:

$$\left.\begin{array}{r} I = Av_d n q_e \\ v_d = \frac{q_e E}{m_e}\tau \end{array}\right\} \Longrightarrow I = \left(\frac{q_e^2 n\tau}{m_e}\right) AE$$

La cantidad entre paréntesis es una característica propia de cada material y se denomina conductividad (se mide en $C^2/m^3$s Kg o Amp/V m y se utiliza la letra $\sigma$, pero ojo no confundirla con la densidad superficial de carga). La inversa de la conductividad es la resistividad, $\rho$ (no confundir con la densidad de carga, una vez más).

$$\sigma = \frac{q_e^2 n\tau}{m_e} = \frac{1}{\rho} \Longrightarrow I = \sigma AE = \frac{AE}{\rho}$$

Finalmente, para establecer una relación entre intensidad y potencial estimaremos que, en promedio, el campo eléctrico es el cociente entre la diferencia de potencial $V$ y la longitud $l$:

$$\left.\begin{array}{r} I = \frac{AE}{\rho} \\ E = \frac{E}{l} \end{array}\right\} \Longrightarrow I = \frac{A}{l}\frac{1}{\rho}V$$

Despejando el potencial:

$$V = I \cdot \frac{l\rho}{A}$$

A la cantidad $l\rho/A$ la denominamos *Resistencia* $R$, y se mide en Ohmios ($\Omega$).

La ley de Ohm relaciona intensidad y diferencia de potencial a través de la resistencia:

$$V = IR$$

Los buenos conductores de la electricidad, como el cobre o el oro, tienen una alta conductividad y baja resistividad, mientras que los materiales que son buenos aislantes tienen baja conductividad y alta resistividad. En un bloque paralelepípedo de sección de 1mm $\times$ 1mm por 1 metro de largo, si establecemos una diferencia de potencial de 1 V tendremos:

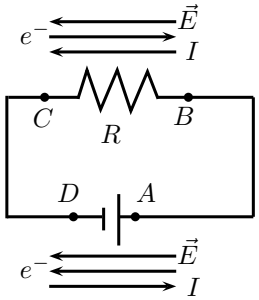
| Material | $\sigma$ | $\rho$ | R | I |
|---|---|---|---|---|
| Cu, Au (conductores) | $10^8$ | $10^{-8}$ | $10^{-2}$ $\Omega$ | 100 A |
| Cristal (aislante) | $10^{-12} - 10^{-16}$ | $10^{12} - 10^{16}$ | $10^{20}$ $\Omega$ | $10^{-20}$ A |

La ley de Ohm se utiliza habitualmente en teoría de circuitos, pero a menudo no se tiene en cuenta que la resistencia es una magnitud que depende fuertemente de la temperatura.

Todos los materiales tienen resistencia. Sin embargo, en los circuitos eléctricos, se considera que los cables (conductores) no tienen resistencia en comparación con los dispositivos conectados (por ejemplo, una bombilla, una lavadora, una TV, etc) que sí que tienen resistencia.

### 1.8.2 Fuente de Alimentación

En los circuitos, la fuente de alimentación es la que establece la diferencia de potencial. La fuente de alimentación se representa esquemáticamente por dos barras paralelas entre sí, de distinta longitud. La de mayor longitud indica que ese es el punto de potencial alto, y la más corta es la de potencial bajo.




En el esquema de la figura, tenemos una fuente de alimentación que establece una diferencia de potencial $V_A - V_D$. Los puntos A y D tienen el mismo potencial, porque están conectados por un conductor. Entre B y C hay una caída de potencial: $V_B > V_C$. Eso quiere decir que hay un campo eléctrico que apunta en el sentido que indica la figura. Los electrones (que sabemos que son las partículas cargadas que se mueven en los circuitos) viajan en sentido contrario al campo eléctrico (porque tienen carga negativa). Por lo tanto, la intensidad circula en el sentido indicado, de B a C.

Si ahora vamos a los extremos de la fuente de alimentación (puntos A y D), vemos que $V_A > V_D$. El campo $\vec{E}$ va de A a D. Pero la corriente circula en este

circuito en sentido antihorario, es decir, los electrones van de A a D, como el campo eléctrico. Para que los electrones se desplacen en sentido opuesto al que la Ley de Coulomb les obliga, hace falta que haya una fuerza en la fuente de alimentación que les obligue a ello. Se trata de la Fuerza ElectroMotriz (FEM). La FEM es la que hace que se establezca una diferencia de potencial y que la corriente fluya sin cesar. Se suele utilizar la letra $\varepsilon$ para designar la fuerza electromotriz de una fuente (es decir, la diferencia de potencial que establece)

La fuente de alimentación tiene, además, una pequeña resistencia interna $r_i$, que en muchas ocasiones se puede despreciar. Sin embargo, cuando las otras resistencias que hay en el circuito son pequeñas, $r_i$ se ha de tener en cuenta.

### 1.8.3 Potencia transmitida

Ahora nos preguntamos por el ritmo al que se transfiere energía cuando una intensidad circula por un circuito.

Si una carga $dq > 0$ pasa de un punto A a un punto B, con $V_A > V_B$, entonces, el trabajo que se ha realizado es $dW = dq(V_A - V_B)$. A partir de esta expresión, podemos dividir por $dt$, y tenemos $dW/dt = (dq/dt)(V_A - V_B)$. A la izquierda de la ecuación tenemos la potencia $P = dW/dt$, mientras que la fracción que aparece al otro lado es la intensidad $I = dq/dt$. Es decir, la potencia es el producto de la intensidad por la diferencia de potencial.

$$P = I\Delta V$$

Esta expresión es independiente de la ley de Ohm.

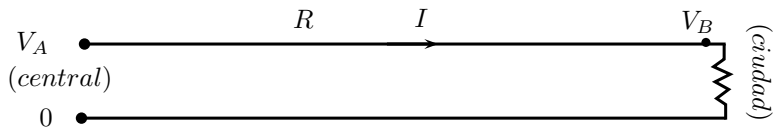
Si por una resistencia $R$ circula una corriente $I$, entonces, por la ley de Ohm sabemos que la diferencia de potencial entre sus dos extremos es $\Delta V = IR$. Por tanto, la potencia que consume es

$$P = I\Delta V = I^2 R$$

#### Transporte de energía eléctrica

¿Por qué las líneas de suministro de energía a grandes distancias son de muy alto potencial?

Cuando la distancia entre las centrales eléctricas y los puntos de consumo es de muchos kilómetros, a través de cables kilométricos, se ha de tener en cuenta que parte de la energía se pierde inevitablemente por el camino. Aunque los cables sean excelentes conductores, con muy baja resistividad, conviene recordar que la resistencia $R$ es también proporcional a la longitud del conductor, con lo que no la podemos despreciar.




Entre el punto A (central eléctrica) y el punto B (ciudad) hay por tanto una caída de potencial. Si circula una intensidad $I$. Si entre ambos puntos hay una resistencia total del cable $R$, sabemos que:

$$V_A - V_B = IR \quad \Longrightarrow V_B = V_A - IR$$

En la ciudad, hay un consumo energético que hace que el potencial caiga hasta cero. Entonces, la potencia entregada a los consumidores es:

$$P = V_B I = V_A I - I^2 R$$

En esta ecuación, $V_B I$ es la cantidad de energía consumida por segundo, mientras que $V_A I$ es la cantidad de energía que por segundo libera la central eléctrica. El otro término, $I^2 R$, es la energía que se ha perdido por el camino, a lo largo del cable, en forma de calor.

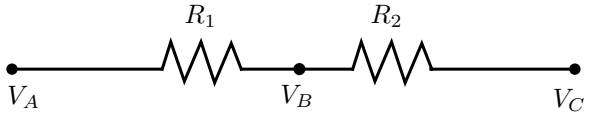
Por razones de eficiencia energética conviene reducir en la medida de lo posible este último término. Para una potencia de la central dada, $P_A$, valen cualesquiera valores del potencial $V_A$ y la intensidad $I$ con tal de que $P_A = V_A I$. Pero, si hacemos muy bajo el potencial, la intensidad será muy alta. En cambio, si hacemos muy alto el potencial, la intensidad será muy pequeña. Por ejemplo, para una central que genera 100 megavatios:

| $V_A$ | $I$ | $I^2 R$ |
|---|---|---|
| 100 V | $10^6$ A | $10^{12} R$ w |
| $10^5$ V | $10^3$ A | $10^6 R$ w |

Es decir, si hacemos el potencial muy alto, la intensidad será más baja, y las pérdidas serán menores, porque son proporcionales a la intensidad al cuadrado.

### 1.8.4 Resistencias en serie

Cuando se trabaja con varias resistencias también se cumple la Ley de Ohm, $V = IR$. Para calcular la intensidad que circula por un circuito en el que varias resistencias están conectadas en serie, se debe calcular la resistencia equivalente del sistema.




Si $V_C > V_A$, entonces circulará una intensidad $I$ de izquierda a derecha en el esquema de la figura. La mirma intensidad circulará por ambas resistencias. Por la ley de Ohm, sabemos que ls diferencia de potencial a ambos lados de la resistencia $R_1$ es $V_B - V_A = IR_1$. La caída de potencial en la resistencia $R_2$ es $V_C - V_B = IR_2$. Entonces, la caída de potencial total, es decir, la diferencia de potencial entre los puntos $A$ y $C$ es la suma:

$$V_C - V_A = I(R_1 + R_2)$$

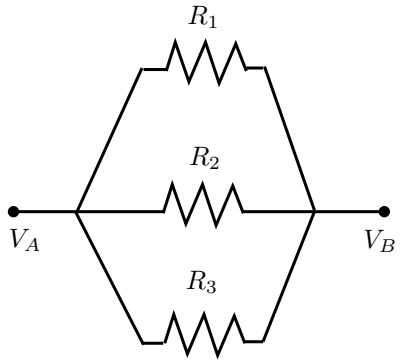
Por lo tanto, existe un circuito con una sola resistencia, $R_{\text{eq}}$ que es equivalente al que tenemos en la figura. Y esa resistencia es:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$$

Es decir, la resistencia equivalente a las resistencias en serie es la suma de las mismas.

### 1.8.5 Resistencias en paralelo

Cuando las resistencias están en paralelo, su equivalente se calcula de manera distinta. Se ha de tener en cuenta que la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera es la misma independientemente del camino seguido.




Por tanto, la caída de potencial que encontraríamos entre los puntos A y B sería la misma sin importar el camino seguido, independientemente de si lo hacemos pasando por la resistencia $R_1$, por $R_2$ o por $R_3$. Pero por cada uno de esos caminos la intensidad que circula no tiene por qué ser la misma. A la que circula por $R_1$ la denominamos $I_1$, a la que atraviesa $R_2$ la danominamos $I_2$ y a la que pasa por $R_3$, $I_3$.

$$\begin{array}{l} V_B - V_A = I_1 R_1 \implies I_1 = \frac{V_B - V_A}{R_1} \\ V_B - V_A = I_2 R_2 \implies I_2 = \frac{V_B - V_A}{R_2} \\ V_B - V_A = I_3 R_3 \implies I_3 = \frac{V_B - V_A}{R_3} \end{array}$$

Pero la intensidad total que circula por el circuito es $I = I_1 + I_2 + I_3$. Entonces, por la ley de Ohm, podemos calcular cual es la resistencia equivalente del sistema:

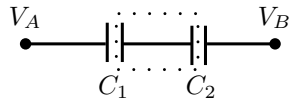
$$V_B - V_A = I R_{\text{eq}} = \left( \frac{V_B - V_A}{R_1} + \frac{V_B - V_A}{R_2} + \frac{V_B - V_A}{R_3} \right) R_{\text{eq}} \implies$$

$$\implies \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

### 1.8.6 Condensadores en serie

Los condensadores también son elementos que se pueden utilizar en circuitos.

Vamos a estudiar cuál es el equivalente a dos condensadores conectados en serie. En la figura tenemos dos condensadores $C_1$ y $C_2$ conectados en serie, con $V_A - V_B = V$.




Nótese que la placa izquierda del condensador $C_1$ acumulará carga positiva y la de la derecha carga negativa (la misma a cada lado, distinto signo). La placa derecha del condensador $C_2$ acumula carga negativa y la izquierda carga positiva. Además, en la zona central (marcada con línea de puntos) no puede haber carga eléctrica neta. Por tanto, ambos condensadores tienen la misma carga, $Q$. En consecuencia, si denominamos $V_1$ a la caída de potencial en el condensador de capacidad $C_1$, y $V_2$ a la caída de potencial en el condensador de capacidad $C_2$, tenemos que:

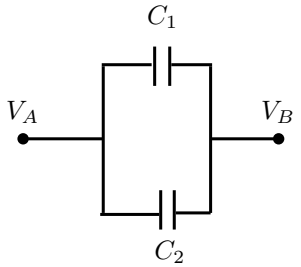
$$\left. \begin{array}{l} Q = C_1 V_1 \\ Q = C_2 V_2 \end{array} \right\} \implies V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Un circuito equivalente, con un solo condensador de capacidad $C_{\text{eq}}$ tendría que tener la misma carga y el mismo potencial:

$$V = \frac{Q}{C_{\text{eq}}} \implies \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

### 1.8.7 Condensadores en paralelo

CUando están conectados en paralelo varios condensadores, cada uno con su capacidad, si que pueden tener distintas cargas, pero la caida de potencial es la misma en cada uno de ellos.




Por tanto, $V_A - V_B = V$ será la caida de potencial en el condensador 1 y en el condendador 2.

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \frac{Q_1}{V} \\ C_2 = \frac{Q_2}{V} \end{array}\right\} \implies Q_1 + Q_2 = V(C_1 + C_2)$$

Si sustituimos el circuito por otro equivalente con un solo condensador de capacidad $C_{\text{eq}}$, tendrá que tener la misma caída de potencial y la misma carga acumulada, es decir:

$$C_{\text{eq}} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} \implies C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$$

# Capítulo 2

# Magnetismo

## 2.1 Introducción

Se tiene constancia de que para el S V AC los griegos conocían la capacidad de determinadas rocas de atraer pequeños trozos de hierro. Estas rocas eran comunes en la región de "Magnesia", de ahí viene el nombre de magnetismo. Hoy se sabe que esas rocas, o imanes, contienen óxido de hierro o magnetita.

Aun mucho anterior es el uso que se les daba a las agujas de magnetita en la antigua China, para hacer brújulas.

Alrededor del S XIII se constató que en cada pedazo de magnetita, hay dos partes en los que la atracción es máxima. Esas partes se denominan *polos*. Cada imán tiene un polo Norte y un polo Sur. Los polos Norte se repelen entre sí, los polos Sur se repelen entre sí, pero los polos distintos se atraen. Esto establece un cierto paralelismo entre la electricidad y el magnetismo, pero hay una diferencia fundamental: En los imanes, siempre existen los dos polos. Nunca se han encontrado *monopolos magnéticos*. En electricidad, si que se pueden aislar monopolos eléctricos, porque cada carga eléctrica es un polo (polo positivo o polo negativo).

En las inmediaciones de un imán existe siempre un *campo magnético*. El campo magnético es una magnitud vectorial que denotamos como $\vec{B}$. Las líneas de campo magnético son curvas que, fuera del imán, se dirigen desde el polo Norte al polo Sur. Se describen unas curvas muy características, que se pueden obtener experimentalmente gracias a una brújula.

Las brújulas no son mas que pequeños imanes que pueden girar libremente. Eso permite que, en las vecindades de otro imán el polo norte de la brújula se oriente en la dirección y sentido que indican las líneas de campo.

En ausencia de otras fuentes de campo magnético, las brújulas se orientan siguiendo las líneas del campo magnético de la Tierra.

A comienzos del S XIX, el investigador danés Oersted descubrió casualmente que las brújulas se ven afectadas ante el paso de corriente por un cable. Este descubrimiento es crucial puesto que sirvió para enlazar el magnetismo y la electricidad. Oersted concluyó que el paso de corriente genera un campo magnético en los alrededores.

A partir de entonces, otros investigadores, como Faraday o Ampère, trabajaron en electricidad y magnetismo hasta que, a finales del S XIX, Maxwell logró

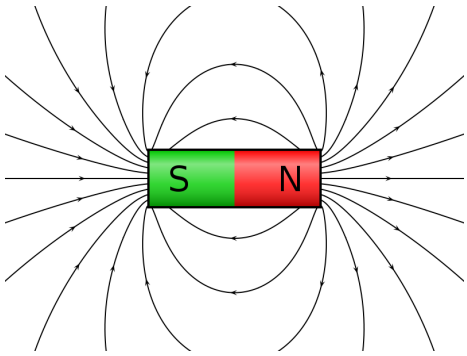



Figure 2.1: Campo magnético creado por un imán. Fuente: `commons.wikimedia.org`

una teoría unificada para el electromagnetismo, que se resume en las *Ecuaciones de Maxwell*.

### 2.1.1 Fuentes de Camo Magnético

El campo magnético puede ser creado por imanes, que existen en la naturaleza, o pueden ser inducidos artificialmente. También la Tierra tiene su propio campo magnético, con sus correspondientes polos sur y norte magnéticos.

Los imanes crean un campo magnético, cuyas líneas, en el exterior del imán, siempre se dirigen desde el polo norte hacia el polo sur describiendo curvas al estilo de las líneas de campo creadas por un dipolo eléctrico. En el interior del imán, las líneas de $\vec{B}$ continúan hasta describir curvas cerradas, y por tanto van de Sur a Norte, como se indica en la figura 2.1.

Las brújulas, como pequeños imanes, orientan su polo norte en la dirección y sentido que marcan las líneas de campo magnético, es decir, apuntan hacia el polo sur magnético del imán que está creando el campo magnético.

El campo magnético es creado no solo por los imanes que existen en la naturaleza (o pueden ser inducidos), sino también por corrientes eléctricas. Desde el descubrimiento de Oersted se sabe que un cable rectilíneo por el que circula una corriente crea un campo $\vec{B}$ que tiene geometría circular, y cuyo sentido se determina mediante la regla de la mano derecha o regla del sacacorchos (ver fig. 2.2)

## 2.2 Cargas en campos magnéticos

Hemos hablado de dirección y sentido de las líneas de campo magnético, pero no de la intensidad del mismo.

Definir la intensidad del campo eléctrico es sencillo. Se sabe que el campo eléctrico afecta a las cargas eléctricas, dando como resultado una fuerza $\vec{F}$ sobre la carga $q$, de tal manera que el campo $\vec{E}$ es simplemente el cociente entre la fuerza y la carga:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

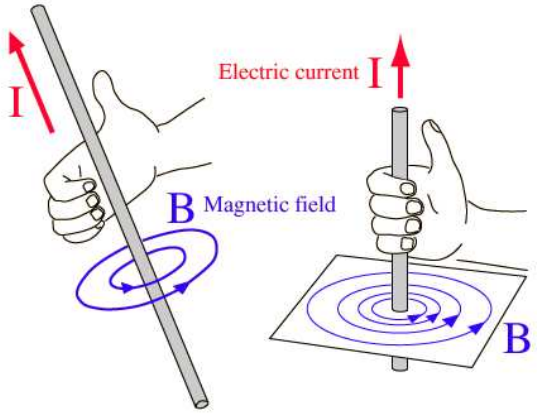



Figure 2.2: Campo magnético creado por una corriente rectilínea. Fuente: `commons.wikimedia.org`

No se puede definir una intensidad de campo magnético en el mismo sentido, puesto que no existe el equivalente de *carga magnética*, ya que esto sería lo mismo que un monopolo magnético, algo que nunca se ha encontrado. Sin embargo, si que se sabe que los campos magnéticos afectan a las partículas que tienen carga eléctrica si éstas tienen velocidad, no están en reposo. La fuerza que actúa sobre una partícula con carga eléctrica es proporcional a su carga, a la intensidad del campo magnético, y a su velocidad, pero a su vez es perpendicular a $\vec{B}$ y a $\vec{v}$, de lo cual se infiere que la fuerza ha de ser el resultado de un producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$. La fuerza se escribe por tanto así:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{2.1}$$

A partir de esta ecuación se define la intensidad del campo $\vec{B}$. En el SI lo medimos en Tesla ($T$). Un campo de 1 $T$ es realmente grande, con lo que es habitual trabajar con otra unidad, el Gauss ($G$). 1 $G = 10^{-4}$ $T$.

Según la ecuación 2.1, la fuerza resultante es perpendicular a la dirección del movimiento que provoca. Esto quiere decir que $\vec{F}_B$ *NO hace trabajo*: puede cambiar la dirección e $\vec{v}$ pero no modificar $|\vec{v}|$ ni modificar la energía cinética de la partícula. El resultado, cuando tenemos un campo magnético constante, y velocidad perpendicular a él, es como ya se ha mencionado una fuerza (y por tanto una aceleración) perpendicular a la dirección de movimiento. Esto significa que el movimiento resultante es circular: la partícula describe órbitas circulares con radio $R$. Cuando $\vec{v} \perp \vec{B}$, el producto vectorial es inmediato y nos podemos quedar con los valores absolutos. Además, como sabemos que va a ser un movimiento circular, podemos igualar la fuerza que experimenta la carga a la fuerza centrípeta, y a partir de ahí deducir el radio $R$:

$$\left.\begin{array}{r} F = qvB \\ F = ma_c = m\frac{v^2}{R} \end{array}\right\} \implies R = \frac{mv}{qB}$$

Es decir, el radio es proporcional a la masa de la partícula y a su velocidad, pero inversamente proporcional a su carga eléctrica y el campo magnético. Además,

recordando las ecuaciones del movimiento circular:

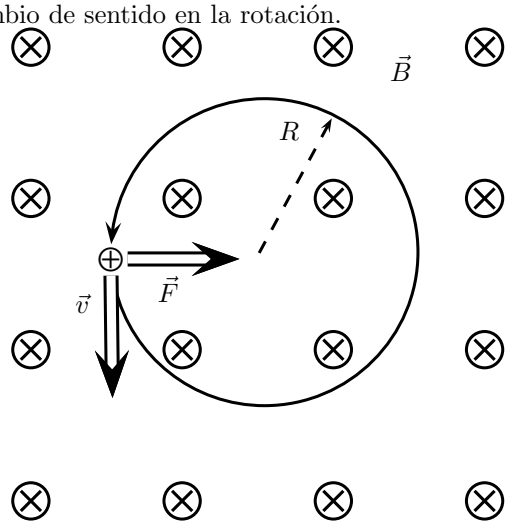
$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \implies T = 2\pi\frac{R}{v}$$

es decir, el periodo $T$, utilizando el valor del radio que hemos deducido antes:

$$T = 2\pi\frac{m}{qB}$$

es independiente de la velocidad de la partícula y del radio de su órbita.

Un esquema de una trayectoria lo tenemos en la siguiente figura, donde el campo magnético es constante en todos los puntos, perpendicular al plano del papel, y entrando en él. Nótese que en las mismas condiciones de velocidad inicial y campo magnético, el cambio de signo de la carga eléctrica implica un cambio de sentido en la rotación.




### 2.2.1 Fuerza de Lorentz

Si, además de un campo magnético, existe un campo eléctrico, éste también afectará a la partícula cargada. Por tanto, la ecuación que describe la fuerza total resultante es:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Esta es la llamada *Fuerza de Lorentz*.

Cuando no hay campo eléctrico presente pero sí magnético se habla también de Fuerza de Lorentz.

### 2.2.2 Selector de velocidades

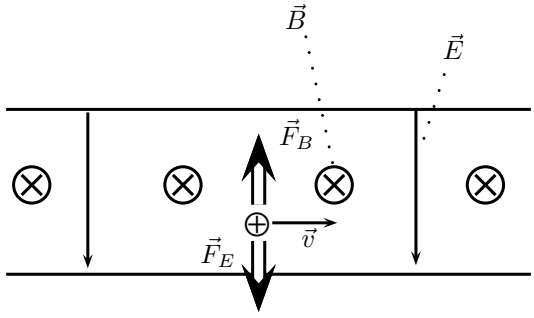
Una de las aplicaciones de la fuerza de Lorentz es el selector de velocidades, que permite separar, de entre un conjunto de partículas de distintas velocidades, exclusivamente a aquéllas que se mueven con una velocidad determinada.

El selector de velocidades es un dispositivo similar a un condensador, es decir, dos placas metálicas con cargas opuestas, aunque se diferencia en que suele ser mucho más alargado en una dirección. En el espacio entre las placas

existe un campo eléctrico constante. Además, el selector de velocidades tiene un campo magnético, también constante en la zona entre las placas, orientado de tal modo que $\vec{E} \perp \vec{B}$. Por un extremo se inyectan las partículas, todas con la misma carga $q$, pero con distintas velocidades. Cada partícula individual sentirá una fuerza $\vec{F}_E$ debida al campo eléctrico, y otra, $\vec{F}_B$, debido a que tiene una velocidad en presencia de un campo magnético.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \underbrace{q\vec{E}}_{\vec{F}_E} + \overbrace{q\vec{v} \times \vec{B}}^{\vec{F}_B}$$

$\vec{F}_E$ y $\vec{F}_B$ tienen sentidos opuestos como se indica en la figura:




Si una de las fuerzas es mayor que la otra, la partícula tarde o temprano se desviará hacia una de las placas y colisionará. Sin embargo, si las dos fuerzas son iguales en magnitud, la fuerza total resultante será nula, y la partícula no se desviará, manteniendo su velocidad (Primera ley de Newton o ley de inercia) hasta salir por el otro extremo del selector de velocidades. Para que eso suceda, es necesario que:

$$\left|\vec{F}_E\right| = \left|\vec{F}_B\right| \implies qE = qvB \implies v = \frac{E}{B}$$

Es decir, únicamente atravesarán el selector de velocidades aquéllas partículas cuya velocidad sea el cociente entre el campo eléctrico y el campo magnético. Modificando el valor del campo eléctrico entre las placas se puede cambiar el valor de la velocidad deseada.

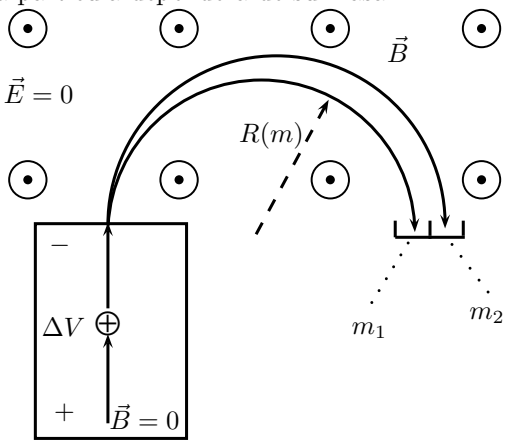
### 2.2.3 Espectrómetro de masas

Hemos visto anteriormente que el radio de la trayectoria circular descrita por una partícula con carga $q$ y masa $m$, con velocidad $v$, en el seno de un campo magnético $B$ es $R = mv/qB$. Entonces, podemos separar partículas de distinta masa, si éstas tienen la misma carga, porque sus órbitas tendrán radios diferentes. Esa es la idea que hay detrás de un espectrómetro de masas.

Un espectrómetro de masas se divide en dos partes. En la primera el campo magnético es cero, pero existe una diferencia de potencial $\Delta V$. Se introducen partículas con la misma carga, y por tanto en esa zona se aceleran ante la presencia del potencial, hasta adquirir una energía cinética $E_C = q\Delta V$. En consecuencia, salen de la primera zona con una velocidad que podemos deducir:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \implies v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

A continuación, las partículas entran a la segunda parte del espectrómetro, donde no hay campo eléctrico, pero si magnético, constante, y perpendicular a la velocidad. Esto hace que las partículas describan órbitas circulares. El radio de cada partícula dependerá de su masa.




Juntando la ecuación de la velocidad con que las partículas entran en la zona de $\vec{B}$ (que es función de la masa y el potencial) y la ecuación del radio de las órbitas, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} \\ R = \frac{mv}{qB} \end{array}\right\} \Longrightarrow R(m) = \frac{\sqrt{2m\Delta V}}{\sqrt{q}B}$$

Con lo que, efectivamente, el radio de las órbitas variará si cambia la masa de las partículas, que es proporcional a $\sqrt{m}$.

### 2.2.4 Fuerza sobre un cable con corriente

Si por un cable que se encuentra en una zona donde hay un campo magnético hacemos pasar una corriente $I$, el cable se verá sometido a una fuerza que será igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre cada uno de los portadores de carga que circulan en el interior del mismo. En el interior del cable, con intensidad $I$, se están moviendo electrones, con velocidad $v_d$, en el sentido opuesto al que indica la intensidad. Esto es matemáticamente equivalente al movimiento de partículas, con la carga opuesta a la del electrón, en el sentido que marca $I$. Si hay $n$ partículas portadoras de carga por cada metro cúbico del material del que está hecho el cable, y éste tiene una longitud $l$ y una sección transversal $A$, entonces, tiene $nlA$ partículas moviéndose en su interior. Por lo tanto la fuerza total que actúa sobre el cable es:

$$\vec{F}_B = q(\vec{v}_d \times \vec{B})nAl$$

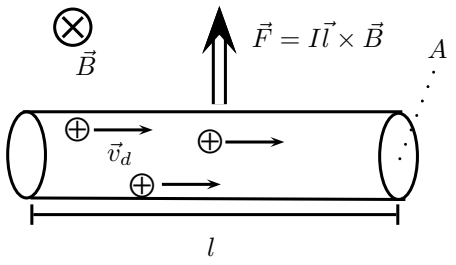
Por otra parte, como se vió en el tema anterior, la intensidad es

$$I = Av_d nq$$

con $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Entonces, partiendo de estas dos ecuaciones, podemos redefinir la fuerza:

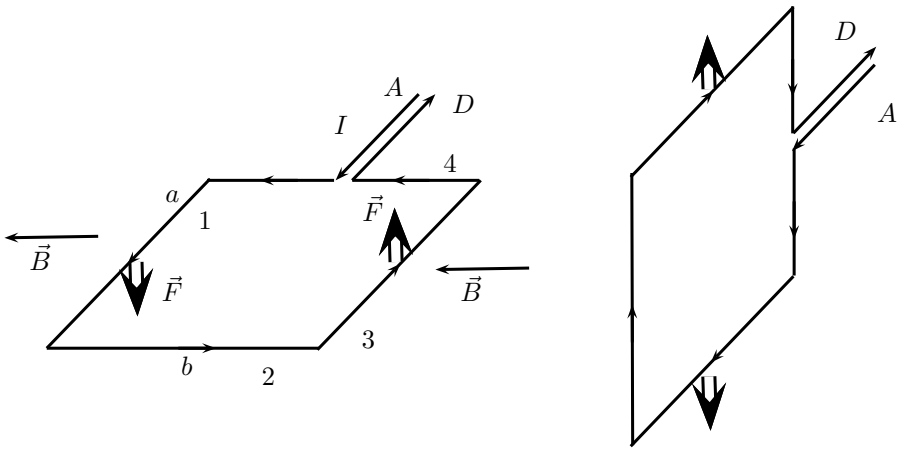
$$\vec{F} = I\vec{l} \times B$$

donde el vector $\vec{l}$ tiene como módulo la longitud del cable, y su dirección y sentido los indica la intensidad que circula.

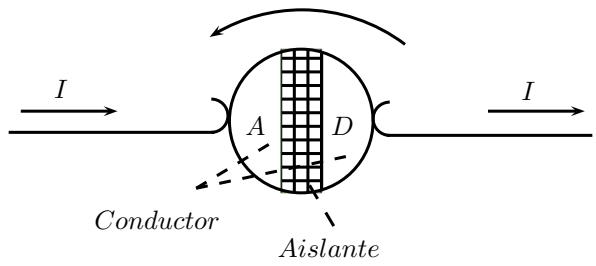



**Conmutador**

Si tenemos una espira rectangular de dimensiones $a \times b$, por la que circula una corriente $I$, contínua, y está sometida a un campo magnético $\vec{B}$=cte como se indica en la figura, la fuerza de Lorentz tiene distinto sentido en los lados 1 y 3, mientras que en los lados 2 y 4 no hay fuerza resultante. La corriente entra por el punto A y sale de la espira por el punto D. Debido al par de fuerzas resultante, como se ve en la figura, la espira tiende a rotar.



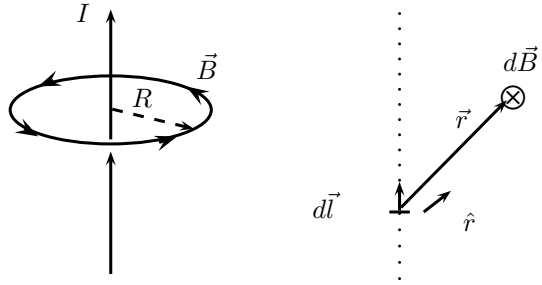

Cuando haya rotado un ángulo $\pi/2$, el par de fuerzas desaparecerá. Si, por la inercia con que llegue a ese punto, la espira gira un ángulo algo mayor que $\pi/2$, el par de fuerzas haría a la espira a rotar en el sentido contrario, hasta regresar a la posición vertical. Sin embargo, si en ese momento, el sentido de la intensidad cambiase, la espira continuaría rotando porque el par de fuerzas se habría invertido. Para mantener la rotación sería necesario que el sentido de la intensidad cambiase cada vez que la espira estuviese orientada en el plano perpendicular a $\vec{B}$. Eso se puede conseguir si se conectan los extremos A y D a un dispositivo rotatorio como se muestra en la figura.




De esta manera, aun con un generador de corriente contínua $I$ (por ejemplo una pila), ésta entraría en el circuito por el punto $A$ o el $D$ de manera alternativa, cambiando según el ángulo de giro. Así se logra que la corriente que circula por la espira vaya cambiando de sentido. Si se construye correctamente, se puede conseguir de esta manera un motor que mantenga la espira rotando. Estos motores se denominan conmutadores.

## 2.3 Ley de Biot-Savart

Se observa experimentalmente que un cable rectilíneo suficientemente largo a través del cual circula una corriente $I$ crea en sus inmediaciones un campo magnético cuya dirección es circular, con sentido siguiendo la regla de la mano derecha, y en magnitud es proporcional a $I$ e inversamente proporcional a la distancia $R$.




Recordando el campo eléctrico que crea un cable que está cargado, el resultado era también inversamente proporcional a la distancia. Eso no es más que la suma de los pequeños campos eléctricos $dE$ creados por cada pequeño fragmento de cable de longitud $dl$, cada uno de ellos con carga $dq$. Pero cada uno de estos $dE$ es inversamente proporcional a la distancia al cuadrado. Entonces, regresando al campo magnético, es plausible suponer que si cada elemento de cable de longitud $dl$ crea, cuando pasa por él una corriente $I$, un campo que decae con la distancia al cuadrado, entonces al sumar la contribución de todos los fragmentos diferenciales (es decir, al hacer la integral) nos saldría un campo magnético proporcional a $I/r$. Esa es la idea que subyace tras el formalismo de Biot-Savart, que nos dice que el campo magnético en un punto $P$, creado por un cable de longitud $dl$ por el que pasa una intensidad $I$ es:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \tag{2.2}$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición que une el fragmento de cable $dl$ con punto $P$, y $\hat{r}$ es el vector de módulo unidad que apunta en la misma dirección y sentido. Además, $d\vec{l}$ es un vector cuyo módulo es $dl$ y su dirección y sentido son los de la

corriente. Obsérvese que el producto vectorial hace que la dirección del campo resultante sea perpendicular tanto al vector $\vec{r}$ como a $\vec{l}$. Finalmente, $\mu_0$ es la llamada permeabilidad magnética del vacío, que vale:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^-7 \text{ Tm/A}$$

El resultado del campo magnético total es la integral sobre todo el cable:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{cable}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Utilizando la ley de Biot-Savart se obtiene que a distancia $R$ de un cable rectilíneo infinito por el que circula una intensidad $I$, el campo magnético es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

En el centro de una espira circular con radio $R$, por la que pasa una corriente $I$, el campo magnético vale

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Ejercicio: Comprobar la veracidad de las dos últimas ecuaciones.

## 2.4 Ley de Gauss para el magnetismo

La *ley de Gauss* para los *campos eléctricos* es la *primera ecuación de Maxwell*. Todo el electromagnetismo puede derivarse de las llamadas ecuaciones de Maxwell.

Al igual que existe una ley de Gauss que en electricidad utilizamos para determinar el flujo eléctrico, nos preguntamos por la existencia de un equivalente en magnetismo.

El flujo magnético, $\Phi_B$, en paralelismo con el eléctrico, lo definimos a partir de una superficie dada:

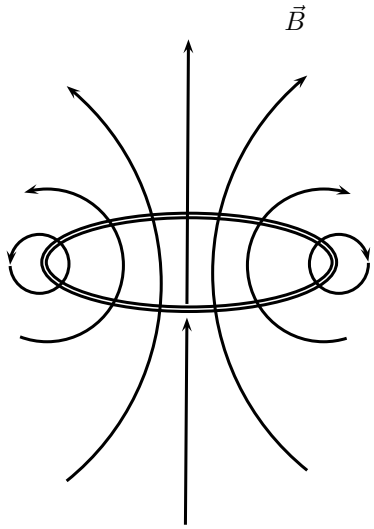
$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Donde la superficie se divide en elementos diferenciales $dA$, y el vector $d\vec{A}$ es perpendicular a la misma.

En unidades del sistema internacional el flujo se mide en Weber: 1 Wb = 1 T·m$^2$.

Si nos fijamos en las líneas de campo magnético, notamos enseguida que el hecho de no existir monopolos magnéticos tiene una importante repercusión en la ley de Gauss. Si definimos una superficie cerrada, vemos que como no hay monopolos magnéticos (serían los equivalentes a las cargas eléctricas) todas las líneas que entran en la superficie terminan saliendo, y viceversa.

Por ejemplo: Las líneas de campo magnético creadas por una corriente circular tienen la forma que se muestra en la figura. La corriente circula en sentido contrario a las agujas del reloj si se mira desde arriba.




Muy cerca de la espira las líneas son aproximadamente circunferencias. Conforme nos acercamos al eje de la espira, las curvas se van deformando. Todas las líneas terminan cerrándose sobre sí mismas, salvo una: En el eje, tenemos una línea de campo rectilínea que es perpendicular al plano de la espira.

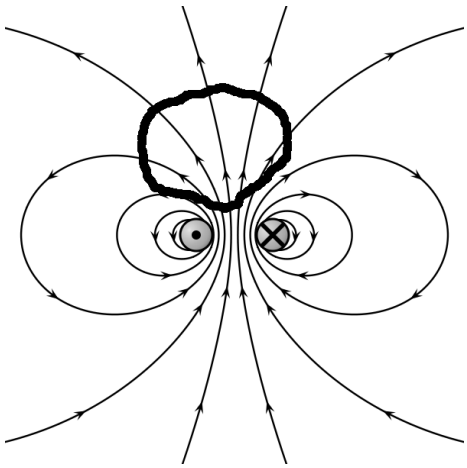


Figure 2.3: Configuración magnética creada por dos corrientes. Fuente: `commons.wikimedia.org`, Autor: `Geek3`.

En el interior de la superficie cerrada (por ejemplo fig. 2.3) ni nacen ni terminan las líneas de campo. Por lo tanto, el *flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero*:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

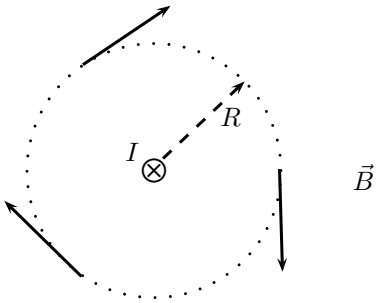
Esta es la *segunda ecuación de Maxwell*.

Si la superficie que definimos no es cerrada, entonces el flujo magnético NO es cero.

## 2.5 Ley de Ampère

Si tenemos una corriente $I$ por un cable rectilíneo, la ley de Biot-Savart nos dice que a una distancia $R$ del mismo el campo vale:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$




Además, sabemos que las líneas de campo describen circunferencias. Si trazamos un camino circular cerrado, y dividimos ese camino en pequeños pasos $d\vec{l}$, podemos calcular la cantidad:

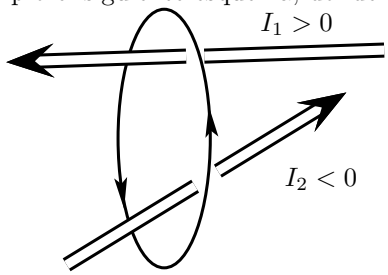
$$\oint_{\text{camino cerrado}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi R$$

Pero además, conocemos el valor de $B$, calculado utilizando Biot-Savart:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \implies$$

$$\oint_{camino\ cerrado} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \tag{2.3}$$

La ecuación 2.3 es la llamada *Ley de Ampère*. La cantidad $I_{\text{enc}}$ se refiere a la intensidad *encerrada* por el camino cerrado en el cual calculamos la integral. Para determinarla unívocamente, debemos definir una superficie abierta, cualquiera, con la única condición de que esté determinada por el camino cerrado en el que calculamos la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$. La intensidad total que atraviese esa superficie es la que llamaremos $I_{\text{enc}}$. Para escoger el signo de la intensidad, utilizamos de nuevo la regla de la mano derecha, considerando el sentido en que recorremos el camino cerrado, es decir, el sentido de los elementos $d\vec{l}$. Sirva de ejemplo el siguiente esquema, donde $I_1 > 0$ e $I_2 < 0$.




Ampère fue el primero en notar que el resultado de la integral no dependía ni de la forma ni del tamaño de la curva cerrada que escojamos. Por tanto, esta expresión puede ser muy útil para calcular campos magnéticos cuando de

las condiciones de simetría del sistema podamos calcular fácilmente $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$, o despejar $B$.

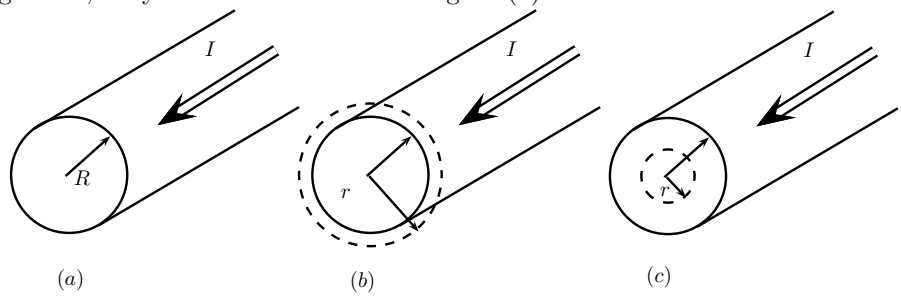
Aunque no se den dichas condiciones de simetría, la ley de Ampère es válida. Sin embargo puede ser muy complicado aplicarla en la práctica. La ley de Ampère en cambio deja de ser válida, en la forma en que aquí se ha presentado, en situaciones donde la corriente no es consante o se está produciendo alguna acumulación espacial de carga (durante la carga de un condensador, por ejemplo). Por tanto, la aplicaremos para relacionar campos magnéticos con intensidades estacionarias y contínuas. Como veremos más adelante, unas modificaciones de esta ecuación le darán carácter general a la ley de Ampére, con lo que pasará a ser válida también para situaciones de corriente no estacionaria. Estas modificaciones darán lugar a la ley e Ampére generalizada, lo que constituye otra de las ecuaciones de Maxwell.

### 2.5.1 Ejemplos

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de aplicación de la Ley de Ampère, que servirán para mejorar su comprensión.

#### Cable recto, de sección circular

Por un cable recto, de sección circular con radio $R$, circula una corriente homogénea $I$, tal y como se muestra en la figura (a).




Sabemos que, en el exterior del cable, el campo magnético será circular, y el sentido de sus líneas de campo será el contrario al de las agujas del reloj, por la regla de la mano derecha. En el interior del cable, las líneas de campo seguirán la misma dirección y sentido, pero la intensidad $I_{\text{enc}}$ será distinta en cada caso.

Empezaremos con el campo en el exterior. Por la simetría cilíndrica del problema, para aplicar la ley de Ampère trazaremos una circunferencia, de radio $r > R$, centrada en el eje del cilindro (figura (b)). Esta circunferencia será la curva cerrada con la que trabajaremos. En primer lugar calculamos la integral:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r$$

donde la curva cerrada se ha dividido en elementos vectoriales $d\vec{l}$, que apuntan en la dirección contraria a la de las agujas del reloj. Se ha escogido así porque sabemos que $\vec{B}$ apunta en la misma dirección y sentido. Por tanto, el producto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ se transforma en $B\, dl$. Además, por la simetría del problema, como ya se dijo, sabemos que $B$ es constante en todos los puntos de la circunferencia, con lo que el cálculo de la integral es inmediato.

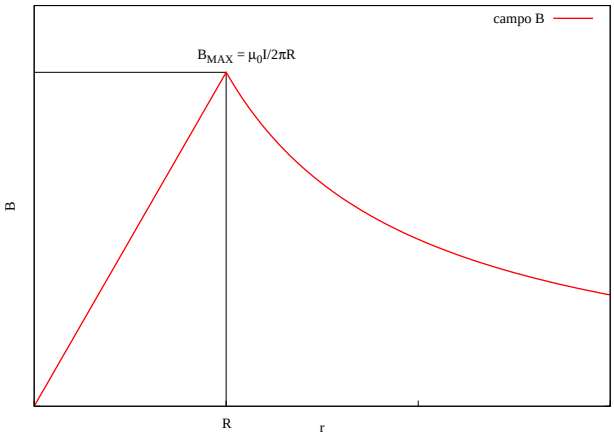



Figure 2.4: Intensidad $I$ en un cilindro de radio $R$. Campo $B$ fuera y dentro.

Por otro lado, el resultado que hemos obtenido lo igualamos a $\mu_0 I_{\text{enc}}$. Para ello debemos definir una superficie determinada por la curva en la que hemos calculado la integral. Cualquier superficie es válida, pero lo más sencillo es utilizar un círculo de radio $r$. La intensidad que penetra en esa superficie es la que se nos dice en el enunciado, $I$. Por tanto:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \implies$$

$$B 2\pi r = \mu_0 I \implies B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

Ahora veamos qué sucede en el interior del cilindro. Procedemos de forma análoga al caso anterior, pero ahora trazamos una circunferencia de radio $r < R$ (ver figura (c)). La integral de camino se hace de la misma manera que en el apartado anterior, pero ahora, trazamos una superficie que esté definida por la circunferencia, y comprobamos que la intensidad que penetra a través de ella no es la misma. En efecto, si la intensidad total $I$ se reparte de forma homogénea por una sección de área $\pi R^2$, a través de una sección de área $\pi r^2$ circulará una intensidad $I_{\text{enc}} = I r^2/R^2$. Por tanto, de la aplicación de la Ley de Ampère obtenemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \implies$$

$$B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \implies B = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{r}{R^2}$$

Es decir, dentro del cable, el campo magnético aumenta linealmente ($B \propto r$) conforme nos alejamos del eje, mientras que una vez fuera del cable, disminuye con la distancia al eje ($B \propto 1/r$). El campo alcanza su valor más alto justo en la superficie del cilindro, es decir, con $r = R$. En la figura 2.4 vemos la forma que tiene la dependencia de $B$ con la distancia al eje $r$.

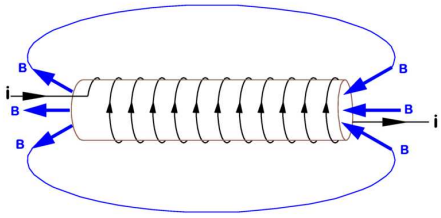


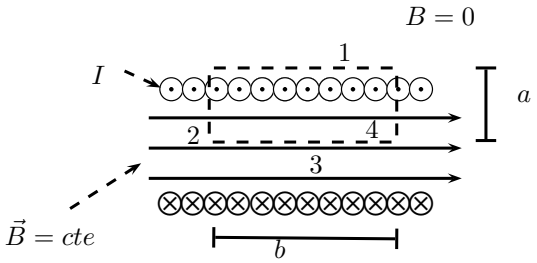

Figure 2.5: Esquema de solenoide y su campo $\vec{B}$. Fuente: `commons.wikimedia.org`. Autor: *P. Wormer*

**Solenoide**

Con la ley de Ampère también podemos calcular el campo magnético en el interior de un solenoide. Un solenoide no es más que un hilo conductor enrollado helicoidalmente hasta completar $N$ vueltas. Por lo tanto se puede equiparar a $N$ espiras circulares si éstas se alinean de manera adecuada. En el interior del solenoide por el que hacemos circular una corriente $I$ el campo es mucho más elevado que si sólo hubiese una espira, puesto que ahora tenemos $N$ espiras y el campo es la suma del que crea cada una.

En el interior del solenoide el campo es aproximadamente uniforme y paralelo al eje. En el exterior el campo es aproximadamente cero. Estas aproximaciones son tanto mejores cuanto mayor sea la densidad de espiras.

Vamos a tomar un solenoide de longitud $L$ formado por $N$ espiras cada una de ellas de radio $R$. Para aplicar la Ley de Ampère definimos una curva cerrada. En este caso tomaremos un rectángulo de dimensiones $a \times b$ como se muestra en la figura.




Parte del rectángulo queda fuera del solenoide (donde $B = 0$) y parte dentro (donde $\vec{B} = cte$). Realizamos la integral de camino a través del rectángulo recorriéndolo en sentido contrario al de las agujas del reloj. Para realizar la integral debemos dividir el rectángulo en tramos rectilíneos (tramos 1, 2, 3 y 4 indicados en la figura).

$$\oint_{\text{rect.}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{lado 1}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{lado 2}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{lado 3}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{lado 4}} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Resolvemos cada integral.

$$\left.\begin{array}{ll} \int_{\text{lado 1}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 & \text{Por } B = 0 \\ \int_{\text{lado 2}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 & \text{Por } B = 0 \text{ o } \vec{B} \perp d\vec{l} \\ \int_{\text{lado 3}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bb & \text{Por } \vec{B} \parallel d\vec{l} \text{ y } B = cte \\ \int_{\text{lado 4}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 & \text{Por } B = 0 \text{ o } \vec{B} \perp d\vec{l} \end{array}\right\} \Longrightarrow \oint_{\text{rect.}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bb$$

Este resultado lo hemos de igualar al producto $\mu_0 I_{\text{enc}}$. ¿Cuál es la intensidad *total* que penetra una superficie definida por el rectángulo? Vemos que si $n$ espiras quedan dentro del rectángulo $a \times b$, y por cada una de ellas circula una corriente $I$, tenemos que $I_{\text{enc}} = nI$. Si en una longitud total del solenoide $L$ hay $N$ espiras, en un tramo de longitud $b$ habrá $n = Nb/L$ espiras. Por tanto, la intensidad que penetra la superficie que estamos estudiando es $I_{\text{enc}} = NbI/L$.

Aplicamos finalmente la Ley de Ampère:

$$\oint_{\text{rect.}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \implies$$

$$Bb = \mu_0 \frac{Nb}{L} I \implies B = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

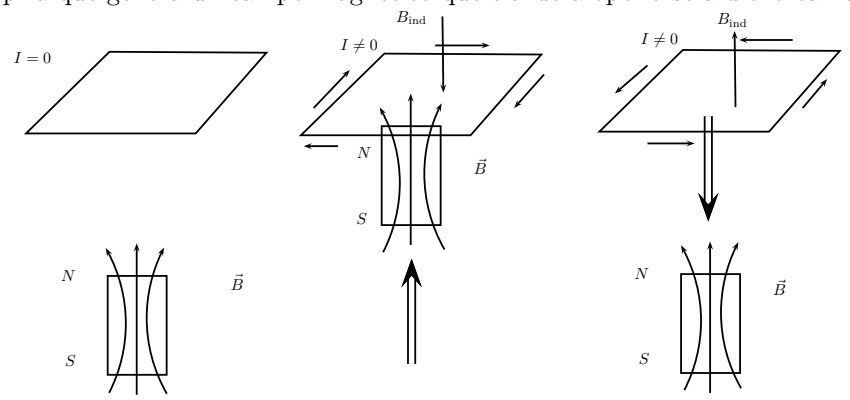
## 2.6 Inducción Electromagnética

Es sabido que una corriente circulando por un conductor induce la aparición de un campo magnético. En definitiva, el campo eléctrico se convierte en una fuente de campo magnético. Michael Faraday se preguntó si el efecto contrario podría suceder, es decir, si el campo magnético podría dar lugar a la aparición de una corriente eléctrica. En 1831 descubrió que eso sucede en el caso de que el campo magnético varíe con el tiempo. Comprobó que al acercar un imán a una espira circular, o al alejarlo, circulaba una pequeña cantidad de corriente, pero que si el imán se dejaba inmóvil la corriente desaparecía. Al acercar el imán y al alejarlo salen corrientes con signos opuestos.

Este fenómeno, la producción de corriente (en definitiva, la producción de campo eléctrico) debido al cambio en campo magnético se conoce como *inducción electromagnética*.

### 2.6.1 Ley de Lenz

Al acercar un imán a un circuito cerrado, como por ejemplo una espira, el campo magnético que la atraviesa aumenta. Entonces, se induce una corriente en la espira que genera un campo magnético que tiende a oponerse a dicho cambio.




La ley de Lenz dice: La corriente inducida produce un campo magnético que se opone a las variaciones en el flujo magnético.

En la figura, tenemos al lado izquierdo un imán quieto debajo de una espira cuadrada. Aunque hay un flujo magnético a través de la espira, no circula

corriente por ésta, porque el flujo magnético no está cambiando. A continuación (figura central) acercamos el imán. Esto produce un aumento en el flujo magnético a través de la espira. Mientras el flujo está aumentando, se induce una corriente que provoca un campo que se oponga a dicho incremento en el flujo. Es decir, la corriente inducida tiene que tener el sentido de las agujas del reloj (vista desde arriba) para que el campo inducido apunte hacia abajo. Si después dejamos el imán quieto, el flujo será constante en el tiempo, y por tanto la corriente inducida es nula. No existe ninguna variación de flujo a la que oponerse.

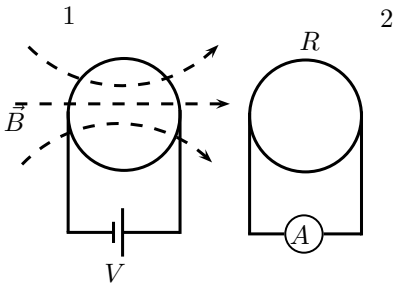
Después, mientras retiramos el imán, el flujo disminuye. Por la espira se induce una corriente que tiende a oponerse a dicha disminución, es decir, una corriente que dé lugar a un campo magnético que tenga el mismo sentido que las líneas de campo del imán. Por eso ahora la corriente circula en sentido antihorario (de nuevo, visto desde arriba).

Como vemos, esta ley nos permite determinar el sentido de la intensidad ante la inducción electromagnética.

### 2.6.2 Ley de Faraday

En sus experimentos, Faraday comprobó que se induce una corriente $I_{\text{ind}}$ en un circuito cerrado en presencia de un campo magnético cambiante.

Uno de esos experimentos se ilustra a continuación: Hay un circuito primario (a la izquierda) en el que se hace circular una corriente a través de un número determinado de espiras, creándose el consiguiente campo magnético. El potencial creado es variable, con lo que el campo magnético $\vec{B}$ depende del tiempo.




Junto al circuito 1 tenemos el circuito 2, que es similar al anterior pero carece de fuente de alimentación. Está compuesto por una serie de espiras de área $A$. Las líneas de campo magnético creadas por 1 atraviesan las espiras del circuito secundario. Cuando hay un campo magnético cambiante se detecta, con un amperímetro, el paso de corriente $I_{\text{ind}}$ por el circuito 2. Eso quiere decir que en ese circuito cerrado, que tiene una resistencia $R$, se induce una fuerza electromotriz $\varepsilon_{\text{ind}} = I_{\text{ind}}R$, por la ley de Ohm.

Faraday observó que la FEM (o la corriente) que se induce en el circuito secundario es:

- Proporcional a la derivada temporal de $B$:

$$\varepsilon_{\text{ind}} \propto \frac{dB}{dt}$$

- Proporcional al área de las espiras:

$$\varepsilon_{\text{ind}} \propto A$$

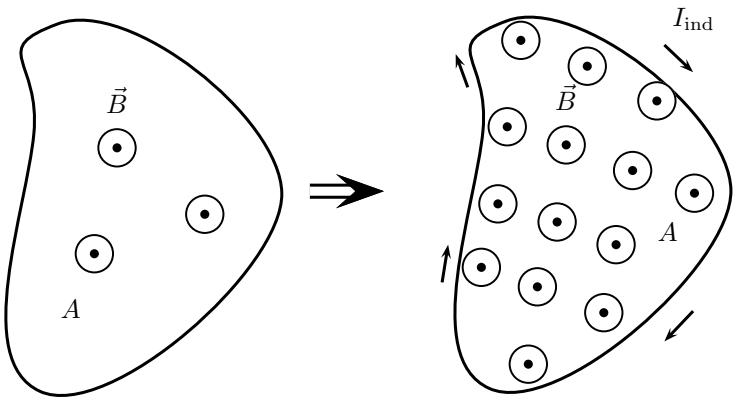
Esto llevó a Faraday a deducir que la fuerza electromotriz inducida es en realidad proporcional a la derivada del flujo magnético:

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

donde el signo negativo da cuenta de la Ley de Lenz. Conviene recordar que el flujo magnético lo calculamos siempre para una superficie abierta, que está definida por el circuito cerrado en el que detectamos una $\varepsilon_{\text{ind}}$.

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

En el esquema siguiente, tenemos un circuito cerrado. A través del circuito pasa un campo magnético perpendicular al papel y saliendo hacia afuera. Además este campo magnético es creciente.




Como se ha dicho, el campo $\vec{B}$ aumenta en el tiempo. Por tanto, el flujo magnético a través de la superficie determinada por el circuito también aumenta. Según la ley de Lenz, el circuito tiende a inducir un campo $\vec{B}$ que se oponga a ese aumento de $\Phi_B$. Para que eso suceda, ha de circular una corriente en sentido horario.

A su vez, la fuerza electromotriz, la calculamos como la integral de camino del campo eléctrico a lo largo del interior del cable:

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \oint_{\text{cable}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

La ley de Faraday no es más que el resultado de igualar las dos últimas ecuaciones:

$$\boxed{\oint_{\substack{\text{circuito}\\ \text{cerrado}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{\substack{\text{superficie}\\ \text{abierta}}} \vec{B}\cdot d\vec{A}}$$

Esta es la tercera de las ecuaciones de Maxwell.

Esta ecuación nos dice que el flujo magnético cambiante induce un campo eléctrico que puede ser también cambiante en el tiempo. Este campo inducido no es *electrostático*, como los creados por cargas eléctricas.

El sentido en que se debe recorrer el circuito cerrado para calcular la integral del campo eléctrico ha de ser el que indique la regla de la mano derecha en función del sentido que hayamos dado al vector normal $d\vec{A}$. Si, en la anterior figura, definimos $d\vec{A}$ perpendicular al papel entrando en el papel, se ha de recorrer el circuito en sentido horario. La superficie abierta en la que debemos calcular el flujo puede ser cualquiera con tal de que quede definida por el circuito cerrado en el que calculamos la FEM inducida.

Como el campo eléctrico no es electrostático, la función potencial deja de tener el sentido que tenía antes. En electrostática:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}, \qquad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Ahora, la fuerza que siente la partícula no es conservativa, y por tanto

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_{\text{ind}} \neq 0$$

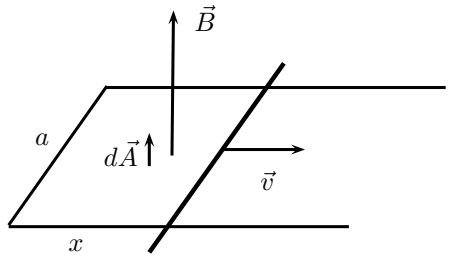
con lo que la diferencia de potencial ya no es una cantidad definida entre dos puntos fijos.

Como hemos visto, para inducir un campo eléctrico o una corriente necesitamos un flujo magnético que dependa del tiempo. Un flujo magnético dependiente del tiempo se puede conseguir de tres maneras fundamentalmente (además de distintas combinaciones entre ellas:

- mediante un campo magnético que dependa del tiempo
- cambiando con el tiempo el área en que calculamos el flujo
- cambiando el ángulo que forman el vector normal al área y el campo magnético

### Área dependiente del tiempo

Una forma de inducir una fuerza electromotriz es la variación del área encerrada por un circuito. En el esquema siguiente, tenemos una espira rectangular, pero uno de sus lados es móvil, y se desplaza con velocidad $\vec{v}$. Está sometida a un campo magnético $\vec{B}$, uniforme, constante y paralelo al vector $d\vec{A}$, cuyo sentido escogemos según se observa en la figura:



El cálculo del flujo a través de superficie encerrada en el circuito cerrado es sencillo:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = Blx$$

Pero para conocer la fuerza electromotriz inducida necesitamos saber cómo cambia el flujo en el tiempo:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bl\frac{dx}{dt}$$

Precisamente, la derivada de la posición $x$ con el tiempo es la velocidad: $dx/dt = v$. Por tanto, el módulo de la fuerza electromotriz inducida es:

$$|\varepsilon_{\text{ind}}| = \left| -\frac{d\Phi_B}{dt} \right| = Blv$$

Si el circuito tiene una resistencia equivalente $R$, la intensidad inducida es:

$$I_{\text{ind}} = \frac{\varepsilon_{\text{ind}}}{R}$$

Si la velocidad tiene el sentido indicado en la figura, el flujo magnético a través de la espira está aumentando. Por tanto, por la ley de Lenz, el sentido de la FEM y de la corriente inducidas es horario (visto desde arriba).

Este resultado también se puede obtener si se estudia este problema desde el punto de vista energético.

Si se desplaza el lado móvil de la espira se ha de realizar trabajo, puesto que se debe vencer a la Fuerza de Lorentz que se opone a dicho desplazamiento: Según vimos en el apartado 2.2.4, la fuerza de Lorentz es $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$. La barra móvil se desplaza en el sentido indicado en la figura, con lo que la ley de Lenz nos dice que el sentido de la intensidad (y del vector $\vec{l}$) es horario. Por tanto la fuerza de Lorentz es en el sentido opuesto a la velocidad.

Para desplazar la barra, por tanto, se ha de realizar una fuerza que compense a la de Lorentz, igual en módulo y dirección pero en sentido opuesto. Esto quiere decir que se debe realizar trabajo para mover el lado móvil de la espira. Eso es energía que se entrega al circuito para que tenga una corriente, energía que el circuito disipará para convertirla en calor. La potencia que se desarrolla al mover la barra es:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = I_{\text{ind}} lBv$$

El circuito tiene una resistencia equivalente $R$, con lo que la potencia que disipará en forma de calor es:

$$P = I_{\text{ind}}^2 R$$

Las potencias recibida y disipada por el circuito han de igualarse en estado estacionario. La energía por unidad de tiempo que se entrega al circuito debe ser la misma que la que pierde. Al igualar estas dos últimas expresiones, por conservación de la energía, obtenemos:

$$I_{\text{ind}} = \frac{lBv}{R}$$

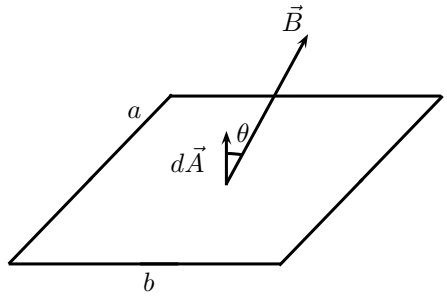
**Inducción por rotación**

Veamos una aplicación de la ley de inducción electromagnética de Faraday.

Sea una espira rectangular, de dimensiones $a \times b$, de material conductor. Esta espira tiene un área $A = ab$ y escogemos su vector normal $\hat{n}$ de modo que $d\vec{A}$ apunta como se indica en la figura. Existe un campo magnético $\vec{B}$ uniforme cuyas líneas de campo forman un ángulo $\theta$ con $d\vec{A}$.

El flujo magnético en la espira :

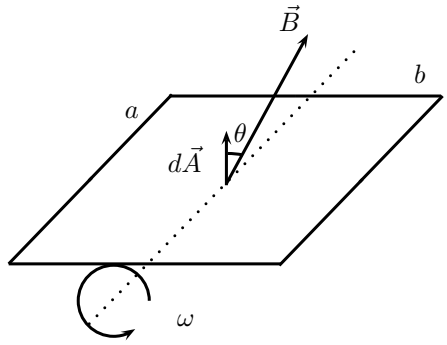
$$\Phi_B = \int_{\text{espira}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{espira}} B \; dA \; \cos\theta = abB\cos\theta$$




La derivada temporal de esta cantidad es la FEM inducida, según Faraday. Por tanto, para tener corriente hace falta que alguno de los términos de la ecuación del flujo magnético sea dependiente del tiempo: el área, el campo magnético, o el ángulo.

Nos centraremos en el ángulo. El área de la espira y el campo $\vec{B}$ quedan como constantes. Si el ángulo disminuye con el tiempo, el coseno aumenta, y el flujo magnético aumenta. Por tanto, la espira induce una corriente en el sentido de las agujas del reloj (visto desde arriba) que da lugar a un campo magnético $\vec{B}_{\text{ind}}$ que se opone al cambio de flujo, es decir, que apunta hacia abajo. Si en cambio, el ángulo está aumentando, el flujo disminuye y la corriente tiene sentido antihorario.

A continuación, podemos hacer rotar la espira, en torno a un eje que pase por su centro y que sea paralelo a sus lados de longitud $a$. Si la frecuencia angular $\omega$ es constante, y tomamos $\theta(t = 0) = 0$, entonces tenemos que la dependencia temporal del ángulo es: $\theta(t) = \omega t$.




Entonces el flujo magnético es:

$$\Phi_B = AB\cos\omega t \implies \frac{d\Phi_B}{dt} = -AB\omega\sin(\omega t)$$

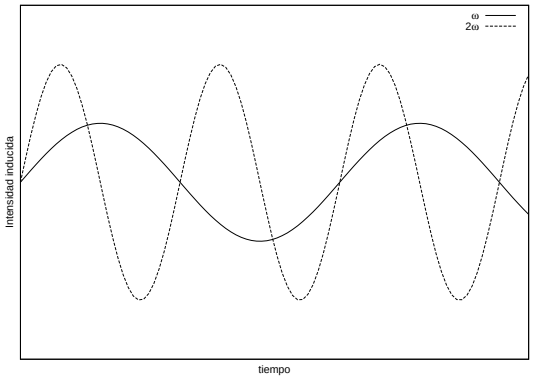



Figure 2.6: Intensidad inducida electromagnéticamente, y su variación con la frecuencia

Y la fuerza electromotriz inducida:

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = AB\omega \sin(\omega t)$$

Finalmente, si el circuito de la espira tiene una resistencia equivalente $R$, la corriente inducida la deducimos gracias a la ley de Ohm:

$$I_{\text{ind}} = \frac{\varepsilon_{\text{ind}}}{R} = \frac{AB\omega}{R} \sin(\omega t)$$

Esto es corriente alterna (AC), como la que llega a los hogares conectados a la red eléctrica.

Si, en lugar de una espira simple, tomamos un circuito que dé $N$ vueltas completas, entonces el flujo es $N$ veces mayor, porque la superficie abierta, muy complicada, definida por el circuito, es atravesada $N$ veces por las líneas de campo magnético. Por tanto, la corriente y la FEM inducidas se incrementan también en un factor $N$:

$$\Phi_B = NAB\cos\omega t \implies \frac{d\Phi_B}{dt} = -NAB\omega \sin(\omega t) \implies$$

$$\varepsilon_{\text{ind}} = NAB\omega \sin(\omega t) \implies I_{\text{ind}} = N\frac{AB\omega}{R} \sin(\omega t)$$

Ésta es una manea de producir corriente alterna (obsérvese que es sinusoidal, proporcional a $\sin(\omega t)$). Por tanto es necesario que la espira, o el conjunto de espiras, se asocie a un sistema que la haga rotar: Una turbina en una central hidroeléctrica, en un molino eólico, etc. Si la frecuencia aumenta, aumentará la intensidad y se reducirá el periodo, como se muestra en la figura 2.6.

### 2.6.3 Auto Inducción

Si por un circuito, conectado a una batería con su FEM, circula una intensidad, esto da lugar a un campo magnético, como ya vimos (por ejemplo en el eje de una espira circular cerrada).

Si ese campo magnético es variable en el tiempo, el flujo $\Phi_B$ también lo será, y por tanto se induce una FEM en el circuito, que se opone a los cambios. Esto lo expresamos en términos de la llamada Auto-Inducción $L$.

El flujo magnético es proporcional a la intensidad que circula por el circuito. La constante de proporcionalidad que relaciona intensidad y flujo es la autoinducción $L$:

$$\Phi_B = LI \implies \varepsilon_{\text{ind}} = -L\frac{dI}{dt}$$

$L$ no es función de la corriente sino que depende únicamente de la geometría del sistema. Por ejemplo, la podemos calcular en un solenoide o bobina. Si tiene longitud $l$ y un total de $N$ vueltas circulares de radio $r$, sabemos que cuando circula por él una corriente $I$, el campo magnético en su interior es:

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}$$

Para calcular el flujo magnético debemos escoger una superficie delimitada por el solenoide. Dicha superficie es complicada, pero se aproxima bastante bien a $N$ veces la superficie de un círculo de radio $r$. Y cada línea de campo atraviesa las $N$ superficies, por tanto:

$$\Phi_B = \pi r^2 NB = \mu_0 \pi r^2 I \frac{N^2}{l} = LI$$

Por la definición de autoinducción, el flujo es igual a $LI$. Por tanto, despejamos $L$:

$$L = \mu_0 \pi r^2 \frac{N^2}{l}$$

, que como vemos es únicamente función de la geometría del sistema: Depende de la longitud del solenoide, del número de espiras y del radio de las mismas, pero no de la corriente que circula.

La unidad en que medimos $L$, en SI es el Henry. 1H = 1V·s/A.

Todos los circuitos cerrados tienen una Autoinducción no nula, aunque puede ser muchas veces despreciable. Por ejemplo, una espira circular tiene también su propia autoinducción, puesto que sabemos que, si tiene una corriente $I$, en el centro de la espira hay un campo magnético $B = \mu_0 I/2R$. Si suponemos $B$ homogéneo en el interior de la espira, tendríamos un flujo magnético $\Phi_B = \pi R^2 B = IL$ y despejando la autoinducción:

$$L = \mu_0 \frac{\pi R}{2}$$

Por ejemplo, en una espira de radio $R = 0.1$ m, obtenemos que $L \simeq 2 \cdot 10^{-7}$ H, que es una cantidad tan baja que sus efectos son despreciables.

En cambio, un solenoide de 20 centímetros de longitud, compuesto por 100 espiras, de $R = 0.1$ m tiene una autoinducción mucho mayor: $L \simeq 2 \cdot 10^{-3}$ H.

### Bobinas en circuitos RL

Veamos los efectos de la autoinducción del circuito, y lo haremos con un circuito en el que tenemos una fuente de alimentación $V$, una bobina o solenoide con autoinducción $L$ y una resistencia $R$ conectados en serie. Recordemos que en la bobina la autoinducción vale $L = \mu_0 \pi r^2 \frac{N^2}{l}$

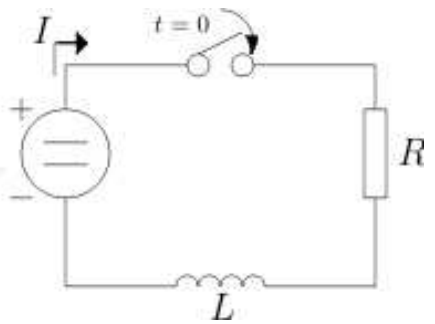



Figure 2.7: Circuito RL. En $t = 0$ el interruptor se cierra. Fuente: `commons.wikimedia.org`. Autor: *Vàclav Štarman*

**Conexión de la batería** Cuando conectemos la batería, la intensidad aumenta. Pero la autoinducción de la bobina induce una fuerza electromotriz que se opone a tal aumento, y por tanto una corriente inducida $I_{\text{ind}}$ que se opone a la generada por la fuente de alimentación. Si se espera un tiempo suficiente, al final la fuente de alimentación *vence* a la bobina y la intensidad total es $I = V/R$, es decir, la misma intensidad que habría sin bobina.

Para ver el efecto de la autoinducción tenemos que aplicar la ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Hacemos la integral de línea del campo eléctrico recorriendo el circuito en el sentido de las agujas del reloj (al igual que la corriente), partiendo desde justo encima de la fuente de alimentación. Vamos recorriendo el circuito:

- En el cable, y en la bobina, $E \simeq 0$, y por tanto $\int E \cdot \vec{dl} = 0$.
- En la resistencia $\int \vec{E} \cdot \vec{dl} = IR$. Hay una caída de potencial que calculamos utilizando la ley de Ohm.
- En la fuente de alimentación nos movemos en sentido opuesto al campo eléctrico, de ahí que la caída de potencial la tengamos que introducir con un signo negativo $\int \vec{E} \cdot \vec{dl} = -V$.

Sumando todos los tramos del circuito cerrado:

$$\oint E \cdot d\vec{l} = \int_{\text{Bobina}} E dl + \int_{\text{Resistencia}} E dl + \int_{\text{Bateria}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 + IR - V$$

Utilizando la ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \implies IR - V = -L\frac{dI}{dt}$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver para despejar la intensidad $I$, que es la única variable que no es constante sino que depende del tiempo. El resultado de esta ecuación es:

$$I(t) = I_{\max}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad I_{\max} = \frac{V}{R}$$

La intensidad, como función del tiempo, se puede representar gráficamente, como vemos en el gráfico 2.8. Si la autoinducción es alta, entonces $R/L$ es pequeña y se necesita mucho tiempo para alcanzar la intensidad máxima. Si en cambio la autoinducción es baja, entonces $R/L$ es más grande y con tiempos bajos ya se consigue la $I_{\max}$. Si la autoinducción es cero, entonces la intensidad es una función *escalón*, pasa de 0 a $I_{\max}$ instantáneamente.

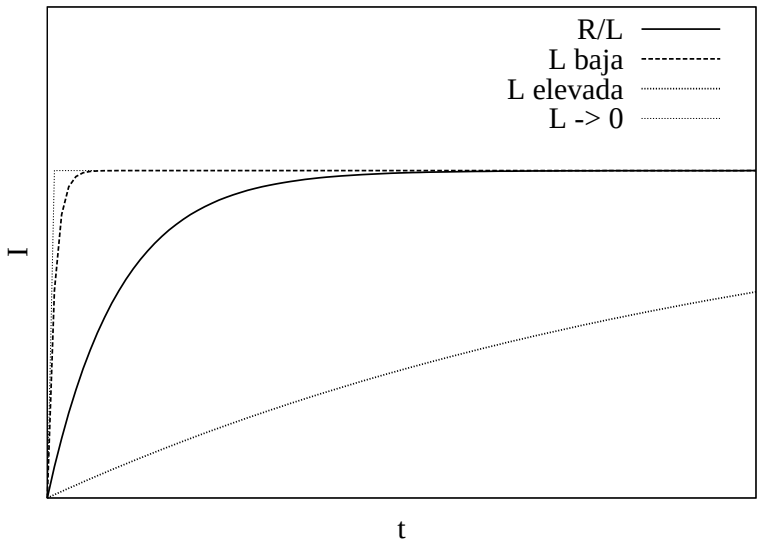



Figure 2.8: I(t) en circuito RL al conectar la batería

En cualquier caso, en $t = 0$, $\implies I = 0$, y en $t \to \infty$, $\implies I = I_{\max}$. La cantidad $L/R$ es una unidad de tiempo, denominado tiempo característico del circuito. Cuando $t = L/R$, la intensidad es un 63% de la máxima.

**Desconexión de la batería** Supongamos que hemos dejado funcionar el circuito durante tiempo suficiente como para que $I = I_{\max}$. Si desconectamos la batería (por ejemplo, quitando la batería de la figura 2.7 y poniendo en su lugar un cortocircuito), la intensidad disminuye drásticamente. Eso supone una disminución en el campo magnético que hay en el interior de la bobina, y por tanto disminución del flujo magnético. Por autoinducción, la bobina lucha contra ese cambio, dando lugar a una corriente inducida, aunque si se espera tiempo suficiente la intensidad que circula será cero.

En el instante en que se desconecta la batería, volvemos a poner a cero el cronómetro. Entonces, inicialmente la intensidad es máxima, pero esperando un tiempo suficiente la intensidad será cero: $t = 0 \implies I = I_{\max}$, y cuando $t \to \infty \implies I = 0$.

Aplicamos la ley de Faraday. La integral del campo eléctrico queda igual que antes pero ahora no hay ninguna fuente de alimentación en el circuito cerrado:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = IR$$

La derivada del flujo magnético es igual que antes:

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Al unir las dos últimas ecuaciones:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \implies IR = -L\frac{dI}{dt}$$

La intensidad depende del tiempo, y es decreciente. La solución a esta ecuación diferencial es:

$$I(t) = I_{\max} e^{-\frac{R}{L}t}, \quad I_{\max} = \frac{V}{R}$$

Si se representa esta corriente gráficamente encontramos una curva como la representada en la figura 2.9.

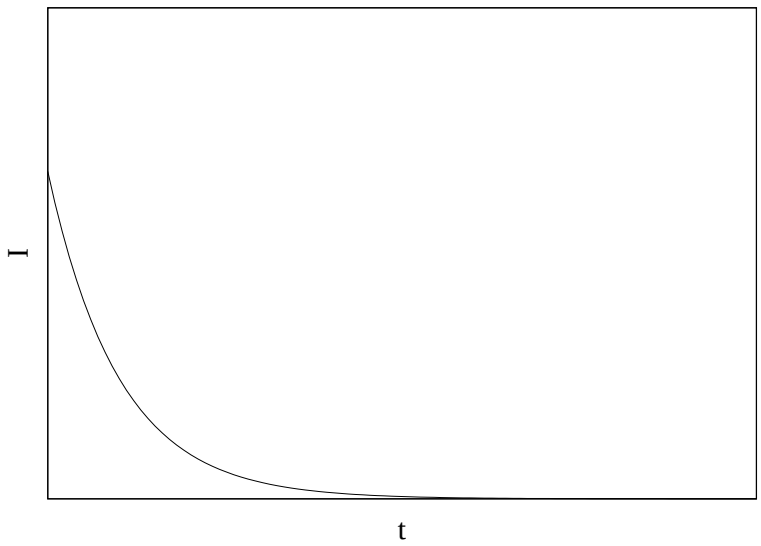



Figure 2.9: I(t) en circuito RL al desconectar la batería

Ahora, cuando el tiempo es $t = L/R$, la intensidad ha disminuido hasta el 37% de la máxima.

Si conectamos la batería y, cuando se ha llegado a la corriente máxima se desconecta, obtenemos una curva $I(t)$ como se muestra en la figura 2.10.

### 2.6.4 Energía asociada a $\vec{B}$

Obsérvese que en el circuito RL, mientras está la batería conectada, se está disipando energía, con una potencia $P = IV = I^2R$. Si nos preguntamos quién aporta esa energía, la respuesta es evidente: la batería o fuente de alimentación.

Pero después de haber sido ésta desconectada, observamos que durante cierto tiempo todavía hay algo de corriente. Eso quiere decir que sigue habiendo energía que se disipará al ritmo $P = IV = I^2R$. Es la bobina la que hace que, al menos durante un tiempo, todavía circule cierta intensidad, con lo que, si nos

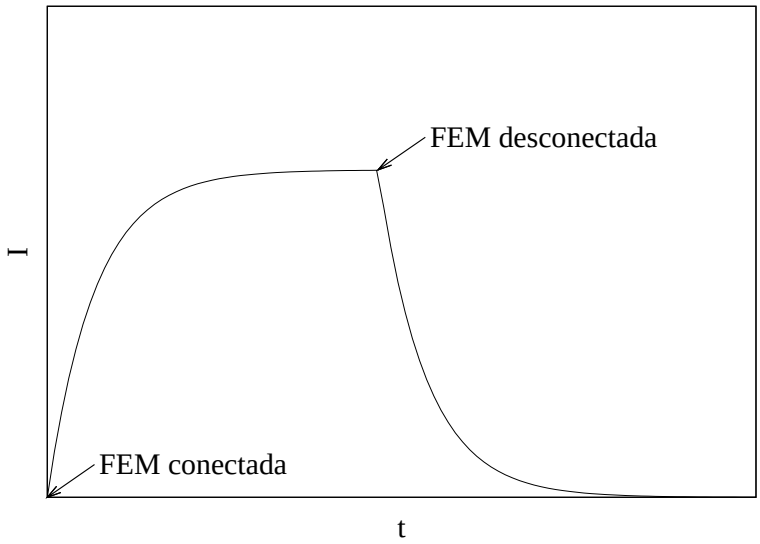



Figure 2.10: I(t) en circuito RL al conectar y luego desconectar la batería

preguntamos de donde viene esta energía la respuesta es que procede del campo magnético que hay en la bobina.

Es decir, hay energía que se *pierde* en forma de calor que previamente ha estado asociada a un campo magnético. Aquí vamos a evaluar la densidad de energía magnética (o cantidad de energía magnética por unidad de volumen). En primer lugar calcularemos cuanta energía se disipa en forma de calor desde la desconexión de la batería hasta el momento en que la corriente se hace nula. Toda esa energía ha de proceder del campo magnético.

Tomamos como tiempo cero el momento de desconexión de la batería. La energía total disipada en la resistencia es:

$$E_B = \int_0^\infty I^2 R dt = I_{\max}^2 R \int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \frac{1}{2} L I_{\max}^2$$

Ahora utilizaremos la expresión para la autoinducción y el campo magnético en una bobina:

$$L = \mu_0 \pi r^2 \frac{N^2}{l}, \qquad B = \mu_0 I \frac{N}{l}$$

donde $l$ es la longitud, y $r$ el radio de las $N$ vueltas de la bobina. Combinando estas ecuaciones con la energía magnética encontramos que:

$$E_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi r^2 l$$

Si observamos que el término $\pi r^2 l$ es el volumen dentro del solenoide, tenemos que la densidad de energía magnética ($u_B$) es:

$$u_B = \frac{\text{Energía Magnética}}{\text{Volumen}} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

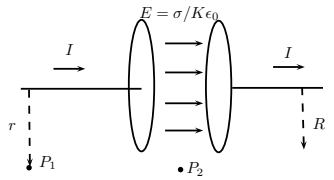
## 2.7 Ampliación de la Ley de Ampère

Como se dijo anteriormente, la Ley de Ampère no es válida en circunstancias en las que se producen acumulaciones de carga eléctrica. Por ello, es preciso hacer algunas modificaciones para hacerla más general. En particular, se introduce el llamado término de *Corriente de Desplazamiento*.

Además, también debe ser tenido en cuenta que algunos materiales atenúan o incrementan el campo magnético, comparado con el del vacío.

### 2.7.1 Corriente de desplazamiento

Para estudiar este punto utilizaremos, como ejemplo, un condensador que está cargándose. Para tener cierto grado de simetría, escogeremos un condensador de placas circulares, de radio $R$.




Su campo eléctrico es:

$$E = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} = \frac{Q}{\pi R^2 K\epsilon_0}$$

Como está circulando una corriente (de izquierda a derecha) las placas se están cargando, y por lo tanto $Q \neq$ cte. De hecho la derivada temporal de $Q$ es precisamente la intensidad. Eso quiere decir que el campo eléctrico entre las placas del condensador no es constante, y podemos expresar su derivada con respecto al tiempo como una función de la intensidad:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt}\frac{1}{\pi R^2 K\epsilon_0} = \frac{I}{\pi R^2 K\epsilon_0}$$

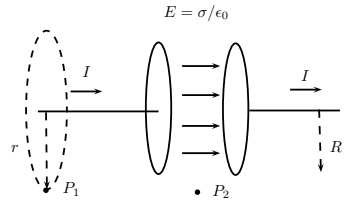
Se supone que la corriente $I$ tarde o temprano tendrá que disminuir hasta cero, cuando el condensador haya terminado de cargarse. En ese momento, el campo en el interior sería constante. Pero mientras dura el proceso de carga, el campo $E$ varía con el tiempo.

Obsérvense ahora los puntos $P_1$ y $P_2$ en la figura. Ambos están a la misma distancia del eje, $r > R$. ¿Cómo es el campo magnético en cada punto?

Aplicamos la ley de Ampère al cálculo de $B$ en el punto 1. El procedimiento es siempre el mismo:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

1.- Escogemos una curva cerrada. Dada la simetría cilíndrica del problema, la curva escogida es un círculo de radio $r$ que pase por $P_1$ y que esté centrado en el cable.




2.- Escogemos también un sentido en que recorrer la curva. Escogemos el sentido antihorario, visto desde el condensador. 3.- Calculamos la integral de la circulación de $\vec{B}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r$$

4.- Escogemos ahora una superficie abierta definida por la curva del punto 1. Vale cualquiera que cumpla esto. Hemos escogido, por simplicidad, un círculo plano. Calculamos $I_{\text{enc}}$: la corriente que atraviesa la superficie.

$$I_{\text{enc}} = +I$$

Por tanto, tenemos que:

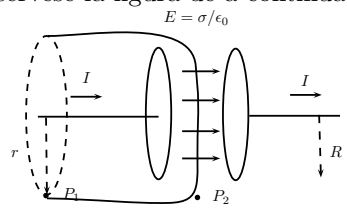
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Podemos seguir los mismos pasos para calcular el campo en $P_2$ utilizando la ley de Ampère (ejercicio). El resultado es algo inesperado:

$$B_2 = 0$$

Este resultado no parece tener sentido, puesto que sabemos que la corriente que pasa por el cable da lugar a un campo $\vec{B}$ en sus inmediaciones, y esto incluye al punto $P_2$, aunque no esté justo sobre la corriente. De lo absurdo del resultado se infiere que una corrección es necesaria en la ley de Ampère.

Para reforzar esta idea, vamos a volver a calcular el campo en el punto $P_1$, utilizando otra superficie. Como es sabido, la ley de Ampère es válida para cualquier superficie abierta que esté delimitada por la curva cerrada escogida. Obsérvese la figura de a continuación:




Ahora, con esta nueva superficie escogida, observamos que $I_{\text{enc}} = 0$ porque la corriente no está cruzando la superficie. Por tanto, se obtiene un resultado para $B_1$ que entra en conflicto con el anterior.

$$B_1 = 0$$

Para adaptar la ley de Ampère a situaciones como estas (de acumulación de carga), Maxwell propuso una modificación. En la zona entre placas no hay corriente, pero hay un campo eléctrico cambiante en el tiempo. Como es sabido, un flujo magnético cambiante induce la aparición de un campo eléctrico (Ley de Faraday). En este caso tenemos la situación opuesta: un flujo eléctrico

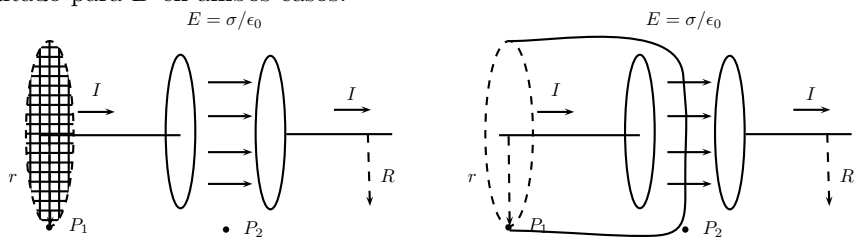
cambiante da lugar a un campo magnético. En la superficie escogida en el último diagrama, tendríamos un flujo eléctrico $\Phi_E$ (el subíndice es para distinguir del flujo magnético) que es cambiante

$$\Phi_E = \int_{\substack{\text{superficie}\\ \text{abierta}}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

La corrección propuesta por Maxwell incluye la derivada con respecto del tiempo de $\Phi_E$:

$$\oint_{\substack{\text{curva}\\ \text{cerrada}}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I_{\text{enc}} + \epsilon_0 K \frac{d}{dt} \int_{\substack{\text{superficie}\\ \text{abierta}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \right)$$

Llegados a este punto veamos cuál es el campo magnético en el punto $P_1$ utilizando esta nueva versión de la ley de Ampère. Anteriormente hemos definido dos posibles superficies en las que calcular el término a la derecha del igual. Si la ley de Ampère, en su nueva versión, es correcta, deberíamos despejar el mismo resultado para $B$ en ambos casos.




Comenzamos aplicando la ecuación a la superficie circular plana (dibujo de la izquierda). En este caso, el flujo eléctrico a través de la superficie es cero, con lo que el nuevo término que hemos introducido en la ley de Ampère no contribuye.

$$E = 0 \implies \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \implies B 2\pi r = \mu_0 I \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Es decir, el resultado que ya conocíamos.

Ahora comprobemos si se obtiene el mismo resultado estudiando la superficie de la derecha. Aquí, la intensidad $I_{\text{enc}} = 0$. Sin embargo, hay un flujo eléctrico cambiante en la superficie. Como se dijo al comenzar esta sección, el campo y su derivada son:

$$E = \frac{Q}{\pi R^2 K \epsilon_0}, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{I}{\pi R^2 K \epsilon_0}$$

El flujo eléctrico y su derivada son:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q \pi R^2}{\pi R^2 K \epsilon_0}, \quad \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{I \pi R^2}{\pi R^2 K \epsilon_0}$$

Entonces, aplicando la ley de Ampère, obtenemos que:

$$B 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 K \frac{I \pi R^2}{\pi R^2 K \epsilon_0} \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Con la corrección de Maxwell, obtenemos el mismo resultado con las dos superficies. El nuevo término que se ha introducido en la ley de Ampère se denomina, por razones históricas, término de *corriente de desplazamiento*.

Ejercicio: Calcular el campo B en el punto $P_2$ (con $r > R$). Repetir para el caso $r < R$.

### 2.7.2 Materiales magnéticos

Recordemos brevemente el efecto que los medios materiales tienen sobre los campos eléctricos. Un campo eléctrico en el vacío, $E$, se ve reducido siempre si se coloca en ese lugar del espacio un material dieléctrico. Se dice que se reduce en un factor $K$, que es la constante dieléctrica del material utilizado. Si se utiliza un conductor, el campo eléctrico se anula por completo.

EL comportamiento de los campos magnéticos en el interior de materiales difiere sensiblemente de lo que sucede con el campo $E$. Algunos materiales disminuyen la magnitud de $B$, otros la aumentan ligeramente, y otros la aumentan mucho. Clasificamos los materiales en función de su susceptibilidad magnética $\chi_B$ y su permeabilidad magnética relativa $K_B$.

Sea $\vec{B}_{\text{ext}}$ el campo magnético en el vacío. El campo magnético en el interior de cualquier material es:

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} K_B, \quad K_B = 1 + \chi_B \implies$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}}(1 + \chi_B)$$

- Materiales diamagnéticos. Aquéllos en los que el campo magnético disminuye comparado en el externo (o del vacío). En estos materiales, por tanto $K_B < 1$ y $\chi_B < 0$. Son la mayoría.

- Materiales paramagnéticos. Son materiales en los que el campo magnético aumenta ligeramente con respecto al del vacío. Es decir, $K_B \gtrsim 1$ y $\chi_B \gtrsim 0$.

- Materiales ferromagnéticos. En estos materiales el campo magnético es mucho mayor que en el exterior. Tienen $\chi_B \gg 1$ y por tanto $K_B \simeq \chi_B$.

| Material | Susceptibilidad magnética $\chi_B$ | Permeabilidad relativa $K_B$ |
|---|---|---|
| Diamagnético | $-10^{-5} \to -10^{-9}$ | $K_B \lesssim 1$ |
| Paramagnético | $10^{-5} \to 10^{-3}$ | $K_B \gtrsim 1$ |
| Ferromagnético | $10^{2} \to 10^{5}$ | $K_B \gg 1$ |

En el vacío, $\chi_B = 0$ y $K_B = 1$. Pero si estamos en un cualquier material estos parámetros cambian. En realidad, para materiales diamagnéticos y paramagnéticos, el cambio es poco perceptible, pero si el material es ferromagnético, el campo $B$ se ve modificado considerablemente. Por tanto, para tener en cuenta este efecto la ley de Ampère necesita ser modificada una vez más. Y esta es la última vez que lo hacemos:

$$\oint_{\substack{\text{curva}\\ \text{cerrada}}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = K_B \mu_0 \left( I_{\text{enc}} + \epsilon_0 K \frac{d}{dt} \int_{\substack{\text{superficie}\\ \text{abierta}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \right)$$

## 2.8 Ecuaciones de Maxwell

**Ley de Gauss**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{K\epsilon_0}$$

**Ley de Gauss para el magnetismo**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

**Ley de Faraday**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

**Ley de Ampère**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 K_B \left( I + \epsilon_0 K \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

# Capítulo 3

# Ondas mecánicas

## 3.1 Introducción

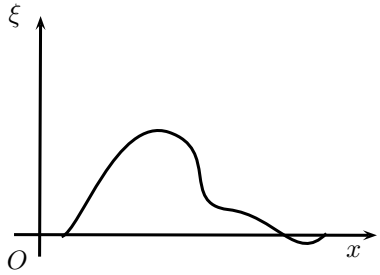
Por onda entendemos una perturbación (cambio) de una magnitud física que se propaga en el espacio. Por ejemplo:

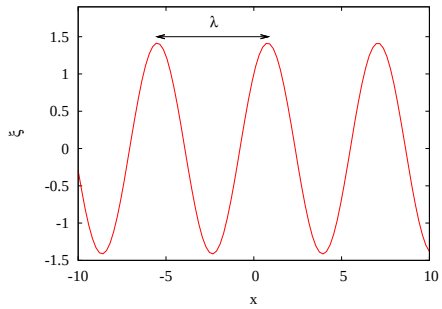
- Cambios en el calado de un líquido: Olas.
- Desplazamientos verticales en una cuerda tensa horizontal.
- Variaciones en la presión del aire: Sonido.
- Cambios en los campos eléctrico y magnético: Ondas electromagnéticas.

Dado que pueden ser perturbaciones de distinta naturaleza, utilizaremos el símbolo $\xi(\vec{r}, t)$ para referirnos a la magnitud genérica cuya perturbación se propaga. La descripción matemática de una onda debe tener en cuenta que el valor de la magnitud perturbada varía en el tiempo, y también varía según la posición, puesto que se propaga, en general, en un espacio en tres dimensiones. Por tanto, en general, las variables de las que depende el valor de la magnitud perturbada son:

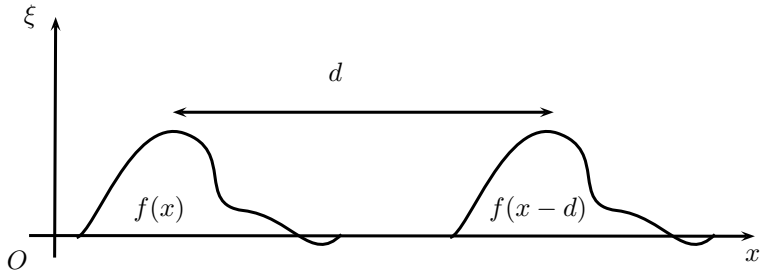
- tiempo $t$.
- posición $\vec{r}$.
  - $x$, $y$, $z$ en el caso más general.

Un caso sencillo es el de una onda que se propaga en una sola dirección, que tomaremos como eje OX. Aquí tenemos dependencia con dos variables, que son la posición $x$ y el tiempo $t$. En un instante determinado de tiempo, su descripción depende solo de la variable $x$: $\xi = f(x)$.






Si la perturbación viaja con una velocidad constante $v$ hacia la derecha, entonces, pasado un tiempo $t$ con respecto a la 'foto' anterior, la curva $f(x)$ se habrá desplazado hacia la derecha una distancia $d = vt$, es decir, pasaríamos de tener $f(x)$ a $f(x - d)$.




Análogamente, si estuviese viajando con la misma velocidad hacia la izquierda, sustituiríamos $f(x)$ por $f(x + d)$.

Con lo que la expresión que caracteriza una onda que viaja en la dirección OX con sentido $\pm x$ con velocidad uniforme $v$, quedaría así:

$$\xi(x, t) = f(x \mp vt)$$

La ventaja de esta expresión es que, de esta manera, hemos relacionado $x$ con $t$, y la función ya solo depende de una variable, que es $x - vt$.

### 3.1.1 Periodicidad

Mientras que algunas ondas son simplemente un único pulso, de corta duración, que se propaga en el espacio, otras están constituidas por una serie de pulsos con un mismo patrón que periódicamente se repite, de forma indefinida. En estos casos tenemos una onda que tiene un periodo de repetición espacial y otro de repetición temporal.

El periodo de repetición espacial se denomina *longitud de onda* y se expresa mediante el símbolo $\lambda$. Esto quiere decir que si reemplazamos $x$ por $x \pm n\lambda$, con $n = 1, 2, 3...$ el valor de $\xi$ se mantiene constante:

$$\xi(x, t) = \xi(x \pm n\lambda, t)$$

Además, si la onda está viajando con velocidad $v$, entonces vale:

$$\xi(x, t) = f(x \mp vt)$$

Como podemos sustituir $x$ por $x \pm n\lambda$:

$$\xi(x,t) = f(x \mp vt) = f(x \pm n\lambda \mp vt) = f\left(x \mp v\left[t - n\frac{\lambda}{v}\right]\right)$$

es decir, vemos que si cambiamos el instante $t$ por el instante $t - n\lambda/v$, la función vale lo mismo. Eso es debido a la periodicidad temporal. El periodo temporal $T$ se relaciona, por tanto, con la velocidad de propagación y la longitud de onda:

$$T = \frac{\lambda}{v}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

la inversa del periodo es $\nu$, la frecuencia.

Obsérvese que $\lambda$ tiene dimensiones de distancia, $T$ tiene dimensiones de tiempo y $\nu$ de tiempo elevado a menos uno.

### 3.1.2 El número de ondas

En ondas es conveniente trabajar con unidades adimensionales. Sin embargo, la cantidad $x + vt$ tiene dimensiones de distancia. Por ello, se define una nueva magnitud: el *número de ondas* $\mathbf{k}$.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Entonces, las ondas periódicas unidimensionales se pueden caracterizar así:

$$\xi(x,t) = f[k(x - vt)] = f[k(x - \lambda\frac{t}{T})]$$

$$k(x - vt) = \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi}{T}t = kx - \omega t$$

Por ejemplo una onda sinusoidal, con amplitud $\xi_0$, con periodicidad espacial $\lambda$ y periodicidad temporal $T$, que viaja con velocidad constante en el sentido de $x$ creciente, se podría describir así:

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

## 3.2 Ecuación de Ondas

Como anteriormente se ha destacado, la función $\xi$, que depende originalmente de dos variables ($t$ y $x$, seguimos estudiando perturbaciones que se propagan en una dirección con velocidad constante), ha pasado a depender de una sola variable, que podemos llamar $u$:

$$u = x \mp vt$$

$$\xi(x,t) = f(u)$$

Derivando con respecto a la posición y al tiempo, podemos encontrar una ecuación que es la que caracteriza a las ondas.

**Derivamos en** $x$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Por otra parte, conocemos bien la expresión de $u$, con lo que su derivada la podemos calcular:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

Por tanto, la expresión anterior:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot 1$$

Derivamos de nuevo:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \tag{3.1}$$

**Derivamos en** $t$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Ahora, lo que podemos conocer es la derivada de $u$ con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mp v$$

Es decir:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mp v \frac{df}{du}$$

Derivando de nuevo:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mp v \frac{d^2 f}{du^2}\frac{\partial u}{\partial t} = (\mp v)(\mp v)\frac{d^2 f}{du^2} \tag{3.2}$$

**Recopilando** las ecuaciones 3.1 y 3.2, obtenemos la ecuación de ondas:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{du^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$

Por lo tanto, la ecuación de una onda que se propaga unidimensionalmente con velocidad constante $v$, tendrá que ser solución de la **ecuación de ondas**. La solución de la ecuación anterior puede ser de tres tipos:

- Una onda que se propaga en el sentido de $x$ creciente: $f_1(x - vt)$.
- Una onda que se propaga en el sentido de $x$ decreciente: $f_2(x + vt)$.
- Una suma de las dos soluciones anteriores.

### 3.2.1 Ondas armónicas

Las ondas armónicas son aquellas que vienen descritas por ecuaciones del tipo:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx \mp \omega t + \varphi_0)$$

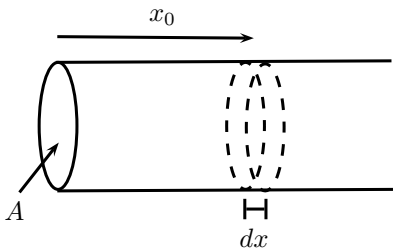
donde $\varphi_0$ es una fase inicial. Ejercicio: Comprobar que $\xi(x,t)$ cumple la ecuación de ondas.

## 3.3 Ejemplos

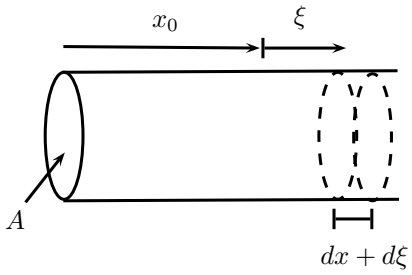
En este apartado veremos dos ejemplos de ondas, estudiando casos de ondas longitudinales y ondas transversales. En primer lugar nos ocuparemos de las ondas que se propagan en un cilindro que contiene un gas.

### 3.3.1 Ejemplo de Ondas longitudinales: Cilindro de gas

Estudiamos un gas contenido en un cilindro de sección transversal $A$. Una rodaja genérica de ese cilindro tiene grosor $dx$, y volumen es $Adx$. La densidad del gas en equilibrio es $\rho_0$, y por lo tanto la masa de gas contenida dentro de la rodaja en cuestión es $dm = \rho_0 Adx$.




Veamos a continuación qué sucedería si una perturbación provocara que la rodaja de gas de grosor $dx$ situada en la posición $x_0$, pasara a situarse en la posición $x_0 + \xi$. Esto puede haber sucedido, por ejemplo, por un movimiento de un pistón en un extremo del cilindro.




La porción de gas se ha desplazado una distancia $\xi$ con respecto a su posición inicial, por tanto, esa será la magnitud perturbada. Además de desplazarse, el grosor de la rodaja de aire señalada ha variado, ahora es $dx + d\xi$.

Al cambiar su volumen, también habrá cambiado la presión que esta 'porción de fluido' ejerce. Para conocer el cambio de presión, hemos de utilizar el llamado 'módulo de compresibilidad', que relaciona las variaciones de presión y de volumen.

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V_0}$$

En nuestro caso, el volumen inicial es $V_0 = Adx$, y el cambio de volumen es $dV = Ad\xi$. Como estamos con cantidades diferenciales, escribimos:

$$dP = -B\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{3.3}$$

Esta expresión para $dP$ nos será útil para estudiar las fuerzas que se ejercen a cada lado de una rodaja de gas de grosor $dx$. La fuerza total que actúa sobre

el mismo la calculamos a partir de la diferencia de presiones a cada uno de sus lados:

$$dF = (P(x) - P(x+dx))A = -dP \cdot A = -A\frac{\partial P}{\partial x}dx$$

Aquí utilizamos la expresión para las variaciones diferenciales de presión:

$$\left.\begin{array}{r} dF = -A\frac{\partial P}{\partial x}dx \\ dP = -B\frac{\partial \xi}{\partial x} \end{array}\right\} \Longrightarrow dF = (-A)(-B)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx \tag{3.4}$$

Además, echaremos mano de la segunda ley de Newton. La rodaja tiene una masa $dm = \rho_0 A dx$, su posición es $x_0 + \xi$, y por lo tanto su aceleración es $a = \partial^2(x_0+\xi)/\partial t^2 = \partial^2\xi/\partial t^2$. Por lo tanto la fuerza que actúa sobre ella es:

$$dF = dm \cdot a = \rho_0 A dx \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{3.5}$$

Igualando las expresiones 3.4 y 3.5, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} dF = AB\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx \\ dF = \rho_0 A dx \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow AB\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx = \rho_0 A dx \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$

Es decir, un desplazamiento $\xi$ es una perturbación que se propaga como una onda en un gas en un cilindro, porque cumple la ecuación de ondas. **La dirección de propagación es la misma que la dirección de la perturbación**, por tanto hablamos de **onda longitudinal**. La velocidad con que se propaga la perturbación es:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$$

Ejercicio: Comprobar que $\sqrt{B/\rho_0}$ tiene dimensiones de velocidad.

### Onda de Presión

En el caso anterior hemos visto como la variable $\xi$ (desplazamiento longitudinal) cumple la ecuación de ondas. Ahora vamos a estudiar la presión.

Obsérvese que, por un lado, se ha dicho que la fuerza es consecuencia de la variación de presión:

$$dF = -AdP$$

Y, además, según la ecuación 3.5, tenemos que:

$$dF = -AdP = \rho_0 A dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) \tag{3.6}$$

Por otra parte, tenemos la ecuación 3.3, que podemos derivar:

$$dP = -B\frac{\partial \xi}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = -B\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -B\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

La función $\xi(x,t)$ cumple la propiedad de igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

Entonces, la expresión anterior se puede reescribir así:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) \tag{3.7}$$

A partir de las ecuaciones 3.6 y 3.7 se obtiene que la presión cumple la ecuación de ondas:

$$\boxed{\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}}$$

Onda que se propaga con la misma velocidad: $v^2 = B/\rho_0$.

**Presión y Sonido**

Las ondas sonoras son ondas de presión, que se propagan con $v = \sqrt{B/\rho_0}$ como hemos visto anteriormente. Si se propagan unidireccionalmente como ondas armónicas, entonces la variación de presión ($\Delta P$, para distinguirla de la potencia $P$) es:

$$\Delta P(x,t) = \Delta P_0 \cos(kx - \omega t)$$

Esta onda aparece asociada a una onda, propagación de un desplazamiento longitudinal $\xi$:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

Las variaciones absolutas de presión son, además,

$$\Delta P = -B\frac{\partial \xi}{\partial x} = -Bk\xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

Por lo tanto, la amplitud de la onda de presión se relaciona con la amplitud del desplazamiento longitudinal $\xi_0$ así: $\Delta P_0 = Bk\xi_0$. De ahí que la ecuación para la onda de presión la escribamos:

$$\Delta P(x,t) = Bk\xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

Obsérvese que la amplitud de la onda de presión se puede reescribir de diversas maneras:

$$\Delta P_0 = Bk\xi_0 = v^2\rho_0 k\xi_0 = v\omega\rho_0\xi_0 = 2\pi v\nu\rho_0\xi_0$$

Nuestros sistemas auditivos son sensibles a un determinado rango de frecuencias: 20 Hz $\lesssim \nu \lesssim$ 20 kHz. En torno a los 3 kHz nuestra sensibilidad es máxima. A esa frecuencia, detectamos ondas de presión del aire de amplitud $\Delta P_0 \sim 3 \cdot 10^{-5}$ Pa. Esta onda de presión está asociada a unas oscilaciones longitudinales de las moléculas de aire con una amplitud $\xi_0 = \Delta P_0/(2\pi v\nu\rho_0) \sim 4 \cdot 10^{-12}$ m.

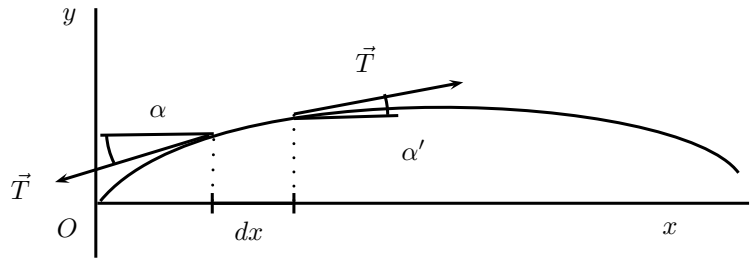
### 3.3.2 Ejemplo de Ondas transversales: Cuerda tensa

A continuación veremos un ejemplo de ondas transversales, es decir, aquéllas en las que la dirección de propagación es perpendicular a su propia dirección.

Supongamos que tenemos una cuerda tensa (tensión $T$), alineada según el eje OX, con un extremo fijo en el origen de coordenadas. Si su longitud es $L$ y su masa $M$, decimos que su densidad lineal es $\mu = M/L$.

Ahora, se practica sobre un punto de la cuerda un pequeño desplazamiento en la dirección perpendicular, $y$. Este desplazamiento se propaga por el resto de la cuerda. Entonces, la variable $y$ es la perturbación, $\xi = y$. Por simplicidad, asumiremos que la tensión de la cuerda se mantiene aproximadamente constante: $T \simeq$cte.

Para saber si esta perturbación se propaga en forma de onda, vamos a estudiar las fuerzas que actúan sobre un elemento infinitesimal de cuerda, de longitud $dx$.




Según la figura, tenemos que la componente en la dirección $y$ de la fuerza resultante es:

$$dF_y = T\sin\alpha' - T\sin\alpha$$

Como ya se ha dicho, el desplazamiento que se ha practicado es pequeño. Eso quiere decir que los ángulos $\alpha$ y $\alpha'$ son pequeños, con lo que los podemos aproximar por su tangente.

$$\alpha \ll 1 \implies \sin\alpha \simeq \tan\alpha$$

por tanto, la ecuación anterior:

$$dF_y = T(\tan\alpha - \tan\alpha') = Td(\tan\alpha) = T\frac{\partial}{\partial x}(\tan\alpha)\,dx$$

Además, por la definición de tangente:

$$\tan\alpha = \frac{\partial\xi}{\partial x} \implies dF_y = T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$$

Por otro lado, tenemos la segunda ecuación de Newton. El fragmento de cuerda de longitud $dx$ tiene una masa $dm = \mu dx$, y su aceleración es $a_y = \partial^2 y/\partial t^2$. Por tanto, la fuerza que actúa sobre ese elemento es:

$$dF_y = dm \cdot a_y = \mu dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

Igualando las dos últimas ecuaciones, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} dF_y = T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx \\ dF_y = \mu dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \end{array}\right\} \implies T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx = \mu dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \implies$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$

Es decir, la perturbación transversal se propaga como una onda con velocidad $v = \sqrt{T/\mu}$. Ejercicio: Comprobar que tiene dimensiones de velocidad.

Y, por lo tanto, la posición $y$ satisfará una ecuación que sea solución de la ecuación de ondas. En concreto, si se trata de una onda armónica que viaja en el sentido de $x$ creciente:

$$y = y_0 \sin(kx - \omega t) \tag{3.8}$$

## 3.4 Energía, Potencia, Intensidad

En un caso como el anterior, vemos que la onda no tiene asociado un transporte de materia. Cada fragmento de cuerda permanece en su posición $x$ y únicamente sube y baja en la dirección $y$. Por otra parte, para que un trozo de cuerda, situado muy lejos del punto donde se perturba el sistema, comience a moverse, es necesario que le llegue energía. Es decir, la onda sí que tiene asociada una transferencia de energía.

La potencia que se transfiere la calculamos como el producto escalar de la fuerza que se ejerce sobre cada fragmento de cuerda por su velocidad. Tomaremos el símbolo $u$ para la velocidad con que sube o baja cada elemento de la cuerda, para no confundirla con $v$, la velocidad de propagación de la onda.

$$P = \vec{F} \cdot \vec{u}$$

La velocidad sólo tiene componente $y$ (cada trozo de cuerda sube y baja, pero no se mueve en el eje OX):

$$u_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

La fuerza es la tensión. Su componente vertical es:

$$F_y = -T \sin\theta \simeq -T \tan\theta$$

donde $\theta$ es el ángulo que forma la tensión con la horizontal. Suponemos que es un ángulo pequeño, y por tanto el seno es aproximadamente igual a la tangente. A su vez, la tangente es, por definición: $\tan\theta = \partial y/\partial x$.

Por tanto, la potencia:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{u} = -T\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}$$

Como tenemos una expresión para $y(x,t)$ (ver ec. 3.8), podemos calcular sus derivadas, e introducirlas en la fórmula de la potencia:

$$P = -T\left[-\omega y_0 \cos(kx - \omega t)\right]\left[k y_0 \cos(kx - \omega t)\right] = T\omega k y_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Como ya es sabido del análisis de las vibraciones en cuerdas tensas, la velocidad de propagación de una onda es: $v = \sqrt{T/\mu}$, con $\mu$ densidad lineal. Además, para cualquier onda, $v = \omega/k$.

$$\left.\begin{array}{c} v = \sqrt{T/\mu} \\ v = \omega/k \end{array}\right\} \Longrightarrow T\omega k = v\mu\omega^2$$

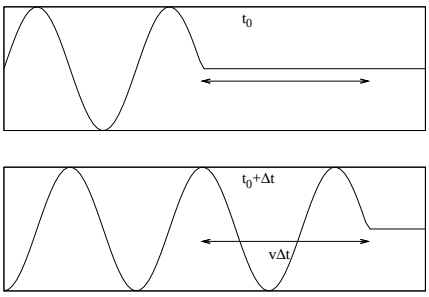



Figure 3.1: Onda viajando hacia la derecha con velocidad $v$: Pasado un intervalo de tiempo $\Delta t$, un tramo de cuerda de longitud $v\Delta t$ pasa del reposo al movimiento

por tanto, la potencia es:

$$P = \mu v \omega^2 y_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Habitualmente es apropiado utilizar la potencia media, promediada en un periodo. Como el valor promedio de la función coseno cuadrado es 1/2:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_0^2 \tag{3.9}$$

Además, también podemos realizar el análisis energético estudiando la variación de energía mecánica. Tomaremos de nuevo el ejemplo de la onda transversal viajando en una cuerda, con velocidad $v$ =cte, hacia la derecha. Si dejamos pasar un tiempo $\Delta t$, un tramo de cuerda de longitud $\Delta x = v\Delta t$ pasa de estar en reposo al movimiento.

La variación de energía mecánica de un sistema, cuando se le está suministrando una potencia $P$ durante un tiempo $\Delta t$ es:

$$\Delta E_M = P\Delta t = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_0^2 \Delta t$$

Como el tramo tiene longitud $\Delta x = v\Delta t$:

$$\Delta E_M = \frac{1}{2} (\mu \Delta x) \left[\omega^2 y_o^2\right] \tag{3.10}$$

Esta es la cantidad de energía que ha llegado a un trozo de cuerda de longitud $\Delta x$ durante el intervalo de tiempo $\Delta t$. Obsérvese que $\mu\Delta x$ es la masa del fragmento de cuerda y $\omega^2 y_0^2$ es el cuadrado de la amplitud de la velocidad $u$ de cada punto de la cuerda o, dicho de otro modo, el cuadrado de la velocidad máxima que cada trozo de cuerda puede tener.

### 3.4.1 Ondas que se propagan a través de una sección $A$

El caso anterior trata de una onda que se propaga a través de una cuerda. No hemos hablado de la sección de la cuerda, porque la consideramos lineal. En el caso de un gas dentro de un cilindro con sección $A$, podemos plantear el mismo ejercicio. La onda viene descrita por la ecuación:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

Ejercicio: Calcular la potencia desarrollada en el caso de una onda en un gas dentro de un cilindro.

La potencia desarrollada es:

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}A\xi_0^2\omega^2 v\rho_0 = vA\left(\frac{1}{2}\xi_0^2\rho_0\omega^2\right)$$

La cantidad entre paréntesis es la energía por unidad de volumen. Se suele emplear la letra $\bar{u}$ para designarla: $\langle P\rangle = vA\bar{u}$.

Supongamos que la onda longitudinal se propaga en un cilindro muy largo, con una velocidad $v$, hacia la derecha en el eje OX. A cada intervalo de tiempo $\Delta t$, la onda recorre una distancia $\Delta x = v\Delta t$. La energía mecánica que se transmite es:

$$\Delta E_M = \langle P\rangle\Delta t = A\left(\frac{1}{2}\xi^2\rho_0\omega^2\right)v\Delta t = \frac{1}{2}(A\rho_0)\left[\omega^2\xi_0^2\right]\Delta x =$$

$$\Delta E_M = \frac{1}{2}(A\Delta x\rho_0)\left[\omega^2\xi_0^2\right]$$

Comparando con la energía transmitida por la onda transversal en una cuerda, vemos que se trata de expresiones análogas. Entre paréntesis tenemos la masa de la 'porción' de aire que pasa de estar en reposo a estar en movimiento en un tiempo $\Delta t$, y entre corchetes tenemos el cuadrado de la amplitud de la velocidad del desplazamiento longitudinal de las partículas de aire.

La intensidad de una onda es la energía media transmitida por unidad de tiempo y unidad de superficie perpendicular al vector velocidad de la onda. Es decir,

$$I = \frac{\langle P\rangle}{A} = v\left(\frac{1}{2}\xi^2\rho_0\omega^2\right)$$

### 3.4.2 Energía de Ondas sonoras armónicas

La intensidad es: $I = \langle P\rangle/A = v\bar{u}$

La energía por unidad de volumen, en una onda de presión que se propaga en una dimensión, es:

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2\xi_0^2$$

Como, por otra parte, se vio con anterioridad, la amplitud de la onda de presión está relacionada con la amplitud de los desplazamientos longitudinales: $\xi_0 = \frac{\Delta P_0}{v\rho_0\omega}$, es decir, la intensidad queda:

$$I = \frac{\Delta P_0^2}{2\rho_0 v} \tag{3.11}$$

#### Percepción de la intensidad acústica

Un amplio rango de intensidades acústicas puede ser detectado por nuestro oído: las ondas con intensidad entre los $10^{-12}$ W/m$^2$ y 1 W/m$^2$. El *volumen* percibido de un sonido se mide en decibelios y se define así:

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0},$$

donde $I_0$ es la intensidad mínima audible, $I_0 = 10^{-12}$ W/m$^2$.

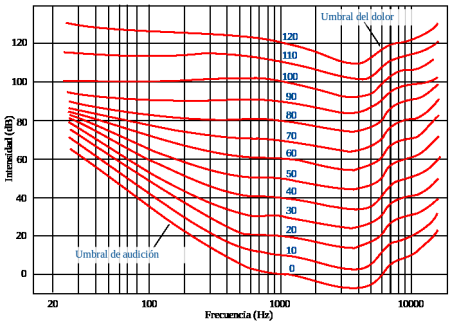
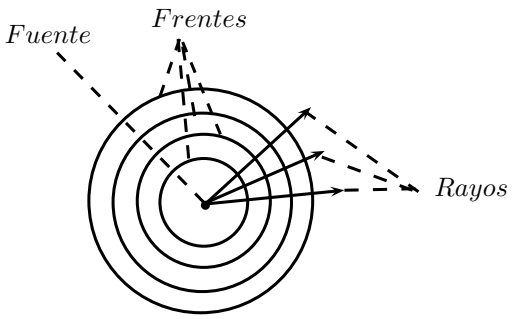



Figure 3.2: Rangos auditivos. Fuente: `commons.wikimedia.org`. Autor: *Oarih, Phirosiberia.*

### 3.4.3 Ondas en dos y tres dimensiones

Hasta ahora hemos estudiado ondas que se propagan en una sola dirección. Los ejemplos de ondas en la superficie del agua o sonido procedente de un foco puntual son casos de ondas que se propagan en dos y tres dimensiones, respectivamente.

En movimiento ondulatorio, las líneas o superficies que tienen en cada momento el mismo valor de la magnitud perturbada se denominan *frentes de onda*. Por ejemplo, las crestas de las onda que forman círculos concéntricos en las olas que se forman al arrojar una piedra al agua, forman frentes de onda. Éstos se alejan del foco en todas las direcciones de propagación. En el caso del sonido, lo que tenemos son ondas tridimensionales, y los frentes de ondas forman superficies esféricas. Los rayos de una onda son líneas perpendiculares a los frentes de onda. El punto del que nacen los frentes de onda y los rayos es el mismo, el punto *fuente*.




Desde un punto ubicado a gran distancia de la fuente, los frentes podrían ser considerados planos, y los rayos paralelos. Entonces se habla de *onda plana*.

Veamos como es la energía de una onda, emitida desde un foco puntual y en todas las direcciones. A una distancia $r$ de la fuente, toda la energía estará repartida de manera uniforme en una superficie esférica, de radio $r$, y superficie $4\pi r^2$. Si el foco emite una potencia $\langle P_{\text{emis}} \rangle$, la potencia por unidad de área a una distancia $r$ es $\langle P_{\text{emis}} \rangle / (4\pi r^2)$, que coincide con la definición de Intensidad:

$$I = \frac{\langle P_{\text{emis}} \rangle}{A} = \frac{\langle P_{\text{emis}} \rangle}{4\pi r^2}$$

[Ojo! no confundir potencia con que se emite la onda con la potencia que se recibe en un punto situado a cierta distancia de la fuente emisora].

Es decir, la intensidad de una onda tridimensional disminuye con el cuadrado de la distancia al foco emisor.

Hemos visto, por otro lado, la intensidad de una onda sonora, que hemos deducido antes, en la expresión 3.11. Es proporcional a la amplitud al cuadrado.

La intensidad es, por un lado, proporcional al cuadrado de la amplitud pero disminuye con el cuadrado de la distancia a la fuente: Eso quiere decir que, en ondas tridimensionales, la amplitud tiene que disminuir forzosamente con la distancia la fuente emisora.

## 3.5 Superposición de ondas (una dimensión)

En este apartado estudiaremos las resultantes de la superposición de ondas. Comenzaremos por las ondas longitudinales. Recomendación: Repasar los apuntes de oscilaciones → Tema 3 de Fundamentos de Física I en Grado en Mecatrónica).

### 3.5.1 Ondas longitudinales

Comenzaremos estudiando el caso de ondas longitudinales. Es el caso más sencillo, por tratarse de perturbaciones que siempre se producen en la misma dirección.

#### De igual frecuencia

Puesto que la velocidad de la onda depende de las propiedades del medio en que ésta se propaga, la igualdad de frecuencias implica igualdad de números de onda. Las únicas diferencias entre ondas pueden ser, por lo tanto, en su amplitud y en el posible desfase de una con respecto a la otra.

Tenemos dos ondas, $\xi_1$ y $\xi_2$. El resultante de la suma es otra onda, $\xi$:

$$\left.\begin{array}{r}\xi_1 = A_1 \sin(kx - \omega t)\\ \xi_2 = A_2 \sin(kx - \omega t + \varphi_0)\end{array}\right\} \xi = A \sin(kx - \omega t + \alpha)$$

Como consideramos que el resultado de la superposición es una onda ($\xi$), necesitamos saber cómo serán su amplitud $A$ y su fase inicial $\alpha$, puesto que su número de ondas y frecuencia angular ya son conocidas. Como es el resultado de una suma, podemos escribir:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \implies$$

$$A \sin(kx - \omega t + \alpha) = A_1 \sin(kx - \omega t) + A_2 \sin(kx - \omega t + \varphi_0) \tag{3.12}$$

Ahora utilizamos una relación trigonométrica para el seno de una suma:

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

y descomponemos el seno de las ondas armónicas $\xi_2$ y $\xi$ así:

$$\sin(kx - \omega t + \varphi_0) = \sin(kx - \omega t)\cos\varphi_0 + \cos(kx - \omega t)\sin\varphi_0$$

$$\sin(kx - \omega t + \alpha) = \sin(kx - \omega t)\cos\alpha + \cos(kx - \omega t)\sin\alpha$$

Sustituyendo en la ecuación 3.12, nos queda:

$$A\left[\sin(kx-\omega t)\cos\alpha+\cos(kx-\omega t)\sin\alpha\right]=$$

$$A_1\sin(kx-\omega t)+A_2\left[\sin(kx-\omega t)\cos\varphi_0+\cos(kx-\omega t)\sin\varphi_0\right]$$

A continuación, agrupamos utilizando como factor común el seno por un lado y el coseno de $kx-\omega t$ por otro:

$$\cos(kx-\omega t)\left[A\sin\alpha-A_2\sin\varphi_0\right]=\sin(kx-\omega t)\left[A_1+A_2\cos\varphi_0-A\cos\alpha\right]$$

Obsérvese que para que esta ecuación se cumpla *siempre*, ha de ser cierta para cualesquiera valores de la cantidad $kx-\omega t$, cantidad que irá variando. Por ejemplo, cuando $kx-\omega t=\pi$, el seno vale cero, por lo tanto, para que se cumpla la ecuación, la cantidad entre corchetes a la izquierda del igual tiene que ser cero. Cuando $kx-\omega t=\pi/2$, el coseno vale cero, y la ecuación solo se cumplirá si lo que hay entre corchetes a la derecha del igual es cero. Por tanto, de la ecuación anterior obtenemos dos ecuaciones independientes:

$$A\sin\alpha=A_2\sin\varphi_0$$

$$A\cos\alpha=A_1+A_2\cos\varphi_0$$

Si estas dos ecuaciones las elevamos al cuadrado y las sumamos, podemos despejar la amplitud $A$:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varphi_0}$$

Si de la pareja de ecuaciones anteriores, dividimos la primera entre la segunda, despejamos la fase inicial, $\alpha$ (o, mejor dicho, su tangente):

$$\tan\alpha=\frac{A_2\sin\varphi_0}{A_1+A_2\cos\varphi_0}$$

Si las ondas están en fase, es decir, si $\varphi_0=0$, entonces la amplitud resultante es la suma de las amplitudes de las dos ondas. Se dice que hay una interferencia constructiva. En el caso opuesto, si las ondas están en contrafase ($\varphi_0=\pi$) se habla de interferencia destructiva: la amplitud resultante es la diferencia de las dos.

### Distintas frecuencias

Tomaremos por simplicidad el caso de iguales amplitudes, y ondas en fase. Las dos ondas de entrada son $\xi_1$ y $\xi_2$, y el resultado de su superposición es $\xi$:

$$\left.\begin{array}{l}\xi_1=A\sin(k_1x-\omega_1t)\\ \xi_2=A\sin(k_2x-\omega_2t)\end{array}\right\}\xi=\xi_1+\xi_2=\ldots$$

$$\xi=2A\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x-\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}x-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

donde se ha utilizado la relación trigonométrica $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$.

Entonces lo que tenemos es una onda resultante, con amplitud modulada: $2A\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x-\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$, y que tiene una $k$ resultante $k=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$, y $\omega$

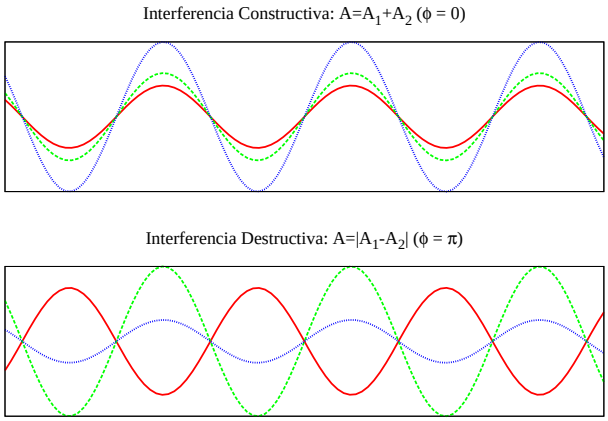



Figure 3.3: Superposición de ondas de igual $\omega$, en fase (arriba) y contrafase (abajo). Onda 1: línea contínua. Onda 2: línea discontínua. Onda resultante: línea de puntos

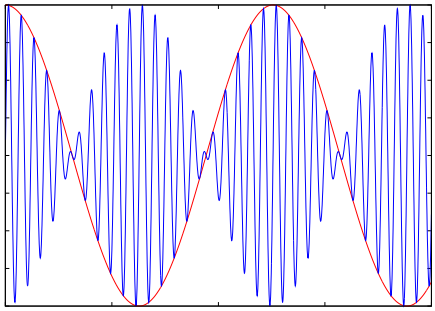


Figure 3.4: Superposición de ondas de distinta frecuencia. Resultado en Azul y Envolvente en Rojo.

resultante $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. Se hace distinción entre la velocidad de fase, a la que se propaga la onda resultante: $v_{\text{fase}} = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2}$ y la velocidad a la que se propaga el perfil de la amplitud modulada o velocidad de grupo: $v_{\text{grupo}} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}$.

La velocidad de grupo es la velocidad con que se desplazan las crestas de la envolvente, mientras que la velocidad de fase es la velocidad de la onda resultante, cuya amplitud está modulada por la envolvente.

### 3.5.2 Ondas Transversales: Polarización

La naturaleza de las ondas transversales nos lleva a definir el concepto de polarización. La polarización se refiere a la dirección que tiene la perturbación que se constituye en onda.

Una cuerda alineada según OX puede tener dos ondas transversales, una de desplazamientos en el eje OY y otra de desplazamientos en el eje OZ. Como vemos, la superposición de estas ondas no será igual que la que tendría lugar en caso de que ambas estuviesen polarizadas en la misma dirección. La polarización

puede ser lineal, si la perturbación y la dirección de propagación de la onda forman un plano que es el mismo para toda la onda, o circular (o elíptica), si la dirección de la perturbación describe una circunferencia o una elipse.

**Polarización lineal**

Si las dos ondas comparten el mismo plano de vibración (por ejemplo, el plano $x$, $y$), entonces la solución a la superposición es la misma que en el caso de ondas longitudinales. Por ejemplo, si tienen igual frecuencia:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(kx - \omega t) \\ y_2 &= A_2 \sin(kx - \omega t + \varphi_0) \end{aligned}\right\} y = A \sin(kx - \omega t + \alpha)$$

Las interferencias que se producen son análogas al caso longitudinal.

O si, compartiendo planos de polarización, las ondas transversales tienen distintas frecuencias pero igual amplitud, tendríamos un comportamiento como el descrito en la sección 3.5.1.

Los casos que revisten un mayor interés son aquéllos en los que los planos de vibración de las dos ondas son distintos. Estudiaremos por simplicidad el caso de ondas de igual frecuencia. Las ondas se propagan en la dirección $OX$ pero una está polarizada según $OY$ y la otra según $OZ$:

$$\left.\begin{aligned} \xi_y &= A \sin(kx - \omega t) \\ \xi_z &= B \sin(kx - \omega t + \varphi) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \xi_{\text{tot}} = \xi_y + \xi_z$$

El resultado dependerá del desfase entre las dos ondas. En cualquier caso, la onda resultante será una perturbación $\xi_{\text{tot}}$ contenida en un rectángulo de tamaño $2A \times 2B$ contenido en el plano $YZ$.

- Si están en fase $\varphi = 0$, el resultado es una onda polarizada linealmente, contenida en el plano con $\tan\alpha = B/A$.
- Si están en contrafase $\varphi = \pi$, el resultado es similar al anterior, pero el plano que contiene la onda está inclinado $\tan\alpha = -B/A$.
- Si el desfase es $\pm\pi/2$, entonces el resultado es una onda con polarización elíptica. En el caso concreto de iguales amplitudes ($A = B$), la polarización es circular.

## 3.6 Reflexión y Transmisión de ondas (1 dimensión)

Las ondas que viajan en un medio material (o en el vacío) y encuentran un cambio de medio, se 'dividen' en dos: Parte de la onda se refleja en la discontinuidad, y parte de la onda se transmite. Cuando un haz de luz incide sobre un cristal, parte de la luz se refleja y parte se transmite.

Un ejemplo sencillo es el de una cuerda cuya densidad lineal cambia en un punto dado. Una onda viaja por una cuerda con densidad lineal $\mu_1$ y llegado un punto, la densidad lineal pasa a ser $\mu_2 \neq \mu_1$.

Es interesante conocer cuales son las características de las ondas reflejada y transmitida con respecto a la incidente. Estudiamos el caso de ondas armónicas.

Antes de comenzar a plantear las ecuaciones de las ondas, veamos qué es lo que sabemos de ellas de antemano.

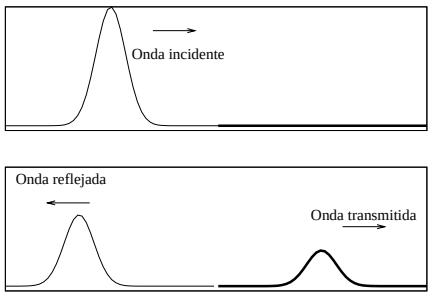



Figure 3.5: Onda reflejada y transmitida en discontinuidad

En el punto de la discontinuidad de las propiedades del medio, sí que hay *continuidad geométrica*. El punto de discontinuidad se desplaza (sube y baja) con una frecuencia, que es la misma que hay a cada lado (en cada una de las dos cuerdas). Por lo tanto $\omega$ es la misma en las tres ondas.

Por otra parte, la tensión $T$ a la que está sometida la cuerda (o cuerdas) es la misma en cada punto. La velocidad de propagación será distinta a cada lado de la discontinuidad: En el lado izquierdo $v_1 = \sqrt{T/\mu_1}$. En el derecho, $v_2 = \sqrt{T/\mu_2}$. Como la frecuencia es la misma a cada lado de la discontinuidad, pero la velocidad cambia, el número de ondas será distinto a cada lado: En la izquierda, $k_1 = \omega/v_1$, mientras que a la derecha, $k_1 = \omega/v_2$.

Así pues, con la información recopilada hasta ahora, planteamos las ecuaciones de las ondas:

Onda incidente: Amplitud $A_i$, número de ondas $k_1$, frecuencia angular $\omega$ y velocidad $v_1 = \sqrt{T/\mu_1}$, hacia la derecha.

$$\xi_i = A_i \sin(\omega t - k_1 x)$$

Onda transmitida: Amplitud $A_t$, número de ondas $k_2$, frecuencia angular $\omega$ y velocidad $v_2 = \sqrt{T/\mu_2}$, hacia la derecha.

$$\xi_t = A_t \sin(\omega t - k_2 x)$$

Onda reflejada: Amplitud $A_r$, número de ondas $k_1$, frecuencia angular $\omega$ y velocidad $v_1 = \sqrt{T/\mu_1}$, hacia la izquierda.

$$\xi_r = A_r \sin(\omega t + k_1 x)$$

Si conocemos el medio de propagación de las ondas, y la onda incidente, las incógnitas que nos quedarían son las amplitudes de las ondas reflejada e incidente. Podemos plantear un par de ecuaciones para despejarlas.

En la discontinuidad, que tomaremos como punto $x = 0$, podemos estudiar la amplitud. En concreto, el límite de la onda resultante cuando se tiende a $x = 0$ desde el lado izquierdo debe ser igual al límite de la onda cuando se tiende al mismo punto desde el lado derecho. Es el mismo argumento que nos permitió deducir que la frecuencia $\omega$ es la misma a ambos lados de la discontinuidad. Si no se cumpliese, significaría que la cuerda se ha roto.

$$\lim_{x\to 0^-} \xi = \lim_{x\to 0^+} \xi \implies \xi_i(0^-) + \xi_r(0^-) = \xi_t(0^+) \implies$$

$$(A_i + A_r)\sin(\omega t) = A_t \sin(\omega t) \implies A_t = A_i + A_r \tag{3.13}$$

Por otro lado, por la conservación de la energía, sabemos que la potencia de la onda incidente debe ser igual a la suma de las potencias de las ondas transmitida y reflejada. En estado estacionario, llega al punto $x = 0$ tanta energía como sale.

$$\langle P_i \rangle = \langle P_t \rangle + \langle P_r \rangle$$

En las cuerdas, la potencia asociada a una onda de amplitud $A_0$ es (eq. 3.9):

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A_0^2 = \frac{1}{2}\frac{T}{v}\omega^2 A_o^2 \tag{3.14}$$

Así pues, la potencia de la onda incidente es:

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2}\frac{T}{v_1}\omega^2 A_i^2$$

La de la onda reflejada:

$$\langle P_r \rangle = \frac{1}{2}\frac{T}{v_1}\omega^2 A_r^2$$

Y la de la onda transmitida:

$$\langle P_t \rangle = \frac{1}{2}\frac{T}{v_2}\omega^2 A_t^2$$

Por tanto, la ecuación de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}\frac{T}{v_1}\omega^2 A_i^2 = \frac{1}{2}\frac{T}{v_1}\omega^2 A_r^2 + \frac{1}{2}\frac{T}{v_2}\omega^2 A_t^2 \implies$$

$$A_i^2 = A_r^2 + \frac{v_1}{v_2}A_t^2 \tag{3.15}$$

Combinando las ecuaciones 3.13 y 3.15, obtenemos las siguientes expresiones para las amplitudes de las ondas transmitida y reflejada:

$$A_r = A_i \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}, \quad A_t = A_r \frac{2v_2}{v_2 + v_1}$$

El cociente entre la amplitud reflejada y la incidente se denomina *coeficiente de reflexión* $r$, y el cociente entre la amplitud transmitida y la incidente es el *coeficiente de transmisión* $t$:

$$r = \frac{A_r}{A_i} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$$

$$t = \frac{A_t}{A_i} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}$$

El cociente entre la potencia reflejada y la incidente es el *Factor de reflexión* $R$, mientras que el cociente entre potencias transmitida e incidente es el *Factor de transmisión* $T$:

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{(v_2 - v_1)^2}{(v_2 + v_1)^2} = r^2$$

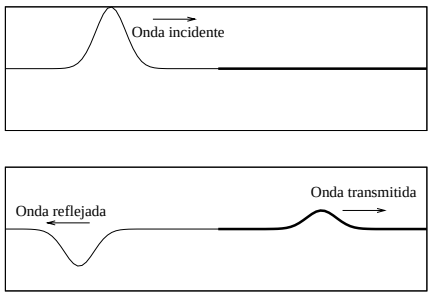



Figure 3.6: Onda reflejada en contrafase

$$T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{4v_1 v_2}{(v_2 + v_1)^2}$$

Notar que, si la amplitud de la onda incidente es $A_i > 0$, obtenemos siempre una amplitud de la onda transmitida $A_t > 0$. Onda transmitida e incidente están en fase.

En cambio el signo de $A_r$ depende del valor de $v_2 - v_1$. Si la densidad lineal es mayor en el segundo medio ($\mu_2 > \mu_1$), entonces la diferencia de velocidades arroja un saldo positivo, y por tanto $A_r > 0$. Entonces, onda reflejada y onda incidente están en fase (ver figura 3.5).

Si la densidad lineal del primer medio es mayor que la del segundo medio ($\mu_1 > \mu_2$), entonces el coeficiente de reflexión es negativo, y la amplitud de la onda es negativa: Onda reflejada e incidente están en contrafase: véase figura 3.6.

### 3.6.1 Reflexión total

Existe la posibilidad de que, dependiendo de cómo sea la discontinuidad del medio en que la onda se propaga, no haya onda transmitida y sólo haya onda reflejada.

En el caso de que la densidad lineal del segundo medio de propagación sea infinita, no hay onda transmitida, porque nos sale una velocidad $v_2 = 0$. Es lo que sucede cuando tenemos una cuerda con su extremo fijo. Entonces, la onda reflejada y la incidente están en contrafase ($A_r < 0$, desfase $\varphi = \pi$).

Por otra parte, si la densidad lineal del segundo medio es cero, encontramos que la amplitud de la onda reflejada es $A_r = A_i$ (ondas en fase, $\varphi = 0$). Tampoco en este caso hay onda transmitida, puesto que $T = 0$. Esta situación se produce cuando un extremo de la cuerda puede moverse libremente en la dirección vertical.

En estos dos casos ($\mu_2 = 0$ y $\mu_2 \to \infty$) se dice que tenemos *reflexión total*.

## 3.7 Ondas estacionarias

Cuando una onda se propaga por un medio acotado, y en los extremos del mismo se produce reflexión total, nos encontramos con una situación en la que la onda resultante es la suma de las ondas reflejadas que se superponen entre sí.

Por ejemplo, podemos imaginarnos una onda en una cuerda con sus dos extremos fijos.

Como hay reflexión total, la amplitud reflejada es la misma que la incidente. Además, por continuidad, la velocidad angular se conserva, y la velocidad es propiedad del medio, con lo que la longitud de onda (y el número de ondas) de la incidente y de la reflejada también coinciden. Tenemos pues una situación como la descrita en la sección en la que se estudió la superposición de ondas. Sin embargo ahora tenemos muchas ondas confinadas, porque las ondas se reflejan sucesivamente. El caso más interesante es aquél en el que las interferencias que se producen son constructivas: entonces se forman ondas de gran amplitud, existe una resonancia. Se dice que tenemos ondas estacionarias.

Comenzaremos estudiando un caso sencillo, la superposición de una onda incidente y la reflejada. La onda incidente viaja en una cuerda que tiene un extremo libre. Por tanto no hay desfase entre la onda incidente y la reflejada.

Incide la onda $\xi_1$, desplazándose hacia la derecha, y la onda reflejada es $\xi_2$, que viaja hacia la izquierda. Ambas tienen la misma longitud de onda y frecuencia. Además, sus amplitudes son iguales porque hay reflexión total. El resultante de la superposición es $\xi_{\text{tot}}$, la suma de ambas:

$$\left.\begin{array}{l}\xi_1 = A_0 \sin(kx - \omega t)\\ \xi_2 = A_0 \sin(kx + \omega t)\end{array}\right\} \Longrightarrow \xi_{\text{tot}} = \xi_1 + \xi_2 = A_0 \left(\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)\right)$$

Existe una relación trigonométrica que nos dice lo siguiente:

$$\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Es decir, podemos escribir $\xi_{\text{tot}}$ de la siguiente manera:

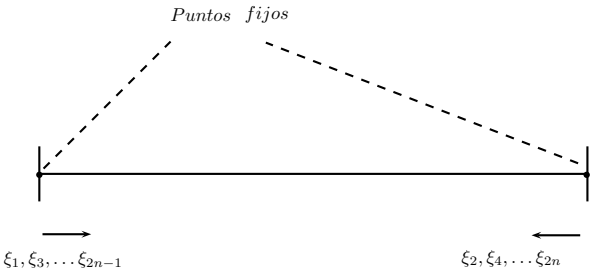
$$\xi_{\text{tot}} = 2A_0 \cos(\omega t)\sin(kx)$$

Como vemos, el resultado son oscilaciones de amplitud $2A_0$ (porque la interferencia era constructiva). Sin embargo, este resultado *no es una onda*, porque no es una función de $(x \pm vt)$ o, dicho de otro modo, no es función de $(kx \pm \omega t)$.

### 3.7.1 Ondas estacionarias con extremos fijos

Veamos ahora un caso más complicado: Tenemos una cuerda tensa, de longitud $L$, con extremos fijos. Eso quiere decir que las reflexiones totales que se producen en sus extremos son con desfase $\pi$ entre la onda incidente y la reflejada, es decir, están en contrafase.

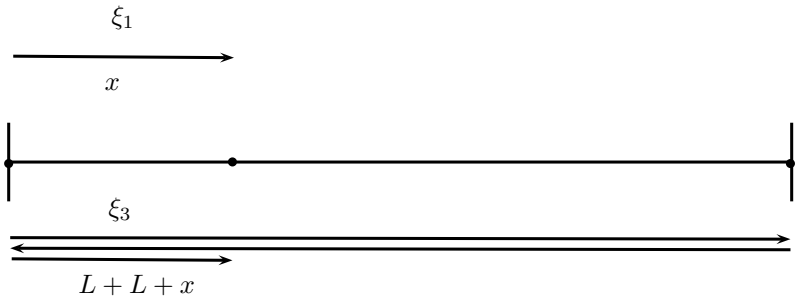
Tenemos inicialmente una onda armónica $\xi_1$, con amplitud $A_1$, viajando hacia la derecha. En el extremo de la cuerda, por reflexión total, aparece una onda viajando hacia la izquierda, $\xi_2$, que tiene un desfase $\pi$ con la primera. Cuando la onda $\xi_2$ alcanza el extremo izquierdo de la cuerda, de nuevo por reflexión total, aparece una onda $\xi_3$ que se propaga hacia la derecha. Sucesivamente aparecerían las ondas $\xi_4$, $\xi_5$... , las impares viajan de izquierda a derecha y las pares de derecha a izquierda. Vamos a estudiar el resultado de dichas superposiciones.




El resultado de las superposiciones será una función $\xi_{\text{tot}} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_5 + ....$

Conviene recordar que, a cada reflexión total se introduce un desfase $\pi$. La amplitud de la onda $\xi_2$ es $A_2 = -A_1$. La amplitud de la onda $\xi_3$ es $A_3 = -A_2 = -(-A_1) \implies A_3 = A_1$.

Veamos ahora cómo sería la superposición de las dos primeras ondas que viajan hacia la derecha, $\xi_1$ y $\xi_3$. Hay que tener en cuenta que la onda 3 tiene un desfase $2\pi$ con la primera, porque ha sufrido dos reflexiones totales. También hay que tener en cuenta que, en el punto $x$, medido desde el extremo izquierdo de la cuerda, donde vamos a estudiar la superposición, la onda $\xi_1$ ha recorrido una distancia $x$, mientras que la onda $\xi_3$ ha recorrido la cuerda dos veces, una en cada sentido, para después recorrer esa distancia $x$.




Entonces, teniendo en cuenta la distancia recorrida por cada onda, y el desfase existente entre ambas, tenemos que las ondas que se superponen en el punto $x$ y en el tiempo $t$ son:

$$\left.\begin{array}{c} \xi_1 = A_1 \sin(\omega t - kx) \\ \xi_3 = A_1 \sin(\omega t - k(2L + x) + 2\pi) = A_1 \sin(\omega t - kx - 2kL) \end{array}\right\}$$

El resultado de esta suma es:

$$\xi_1 + \xi_3 = 2A_1 \cos(kL) \sin(\omega t - kx - kL)$$

Es interesante observar que la onda que resulta de esta suma tendrá amplitud máxima si $kL = n\pi$, con $n = 1, 2, 3....$ En tal caso, las amplitudes se suman, y tenemos una onda con amplitud $2A_1$. La condición para que esto suceda es, como se ha dicho:

$$kL = n\pi \implies \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \implies L = n\frac{\lambda}{2}$$

Si existen muchas reflexiones totales, al final la suma de las ondas que viajan a la derecha es una onda cuya amplitud tiende a infinito. En la práctica, siempre hay pérdidas, pero el resultado de superponer estas ondas da una onda

de amplitud mucho mayor que la inicial, siempre y cuando se cumpla la relación apropiada entre la longitud de la cuerda y la longitud de onda.

El resultado es una onda $\xi_+$ que viaja en sentido de $x$ creciente:

$$\xi_+ = \xi_1 + \xi_3 + \xi_5 + ... = A\sin(\omega t - kx)$$

con $A \gg A_1$.

Ahora, podemos repetir el proceso con las ondas pares, es decir, las que viajan de derecha a izquierda. Como son ondas que se han producido por reflexión total con punto fijo, quiere decir que tienen amplitud negativa. Sumando las dos primeras ondas $\xi_2$ y $\xi_4$, y teniendo en cuenta que la $\xi_4$ ha recorrido una distancia $2L$ mayor:

$$\left.\begin{array}{r}\xi_2 = -A_1\sin(kx+\omega t)\\ \xi_4 = -A_1\sin(2kL+kx+\omega t)\end{array}\right\} \Longrightarrow \xi_2+\xi_4 = -2A_1\cos(kL)\sin(kL+kx-\omega t)\}$$

El resultado tiene amplitud máxima cuando el argumento del coseno es múltiplo de $\pi$ radianes ($kL = n\pi$), igual que para las ondas que viajan hacia la derecha.

Al sumar todas las ondas pares resultado es análogo al de la suma de ondas impares, pero ahora con amplitud negativa:

$$\xi_- = \xi_2 + \xi_4 + \xi_6 + ... = -A\sin(kx+\omega t)$$

con $A \gg A_1$.

Y ahora, finalmente, pasamos a sumar la onda resultante $\xi_+$ y la $\xi_-$.

Obsérvese que lo que se ha hecho al final es la suma de todas las ondas:

$$\xi_{\text{tot}} = \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4+\xi_5+\xi_6+... = \underbrace{(\xi_1+\xi_3+\xi_5+...)}_{\xi_+} + \underbrace{(\xi_2+\xi_4+\xi_6+...)}_{\xi_-} \rightarrow$$

$$\xi_{\text{tot}} = \xi_+ + \xi_-$$

$$\xi_{\text{tot}} = A\left[\sin(\omega t - kx) - \sin(kx+\omega t)\right] =$$

$$\xi_{\text{tot}} = (-2A)\sin(kx)\cos(\omega t)$$

El resultado es una onda estacionaria. Es la suma de varias ondas, pero *no* es una onda viajera. Aunque cumple la ecuación de ondas, no se propaga con ninguna velocidad. El resultado $\xi_{\text{tot}}$ ha sido obtenido para ondas que cumplen que $kL = n\pi$.

Obsérvese que cada punto $x$ de la cuerda oscila con una amplitud que depende de su posición. El punto $x$ experimenta un movimiento oscilatorio armónico con amplitud $A(x) = 2A\sin(kx)$. Si nos fijamos en un punto que cumpla que $kx = n\pi$, entonces veremos que su amplitud es nula, mientras que si escogemos un punto que cumpla que $kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, veremos que su amplitud es máxima:

$$kx = n\pi \rightarrow x = n\frac{\lambda}{2} \rightarrow A(x) = 0$$

$$kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \rightarrow A(x) = 2A$$

Los puntos donde la amplitud es máxima se denominan 'vientres' o 'antinodos' y los de amplitud cero son los 'nodos'. Evidentemente, siempre habrá al menos dos nodos, que serán los extremos de la cuerda, $x = 0$ y $x = L$.

Recordar que para que se produzca una onda estacionaria en una cuerda con los dos extremos fijos es necesario que la longitud de la cuerda $L$ y la longitud de la onda viajera $\lambda$ cumplan la relación $L = n\lambda/2$. Para una misma longitud de onda, pueden producirse ondas estacionarias en determinadas longitudes de cuerda (véase figura 3.7, lado izquierdo). Si tenemos una longitud de onda fija $\lambda$, tendremos ondas estacionarias si la longitud de la cuerda es $L = n\lambda/2$, es decir, si

- $L_1 = \lambda/2$ ($n = 1 \rightarrow$ Primer armónico o armónico fundamental)
- $L_2 = \lambda$ ($n = 2 \rightarrow$ Segundo armónico)
- $L_3 = 3\lambda/2$ ($n = 3 \rightarrow$ Tercer armónico)
- ...

Por otro lado, para una longitud de cuerda fija $L$, pueden darse ondas estacionarias en según qué longitudes de onda (ver figura 3.7, lado derecho). Cuando la longitud de onda es $\lambda = 2L/n$, tenemos ondas estacionarias:

- $\lambda_1 = 2L$ ($n = 1 \rightarrow$ Primer armónico o armónico fundamental)
- $\lambda_2 = L$ ($n = 2 \rightarrow$ Segundo armónico)
- $\lambda_3 = 2L/3$ ($n = 3 \rightarrow$ Tercer armónico)
- ...

Este resultado es general para cualquier tipo de ondas que se propagan unidimensionalmente en un medio acotado con sus dos extremos fijos, es decir, con extremos donde la amplitud de la onda es cero, donde se producen reflexiones totales.

### 3.7.2 Un extremo fijo y uno libre

Ahora podemos estudiar una variante del ejercicio anterior: Utilizaremos un medio en el que la reflexión total se hace con punto fijo en uno de sus extremos y con un punto libre en el otro extremo. Recuérdese que en el punto fijo hay cambio del signo de la amplitud durante la reflexión total, mientras que en el extremo libre ese cambio de signo no acontece.

Tomemos una cuerda de longitud $L$ con el extremo derecho fijo y con el izquierdo libre (por ejemplo, podemos sujetar la cuerda con otra cuerda de otro material, que tenga una densidad lineal muy, muy baja).

Como antes, partimos de una onda $\xi_1$, que viaja de izquierda a derecha y tiene una serie de reflexiones totales: $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$, $\xi_5$... etc. Las ondas con subíndice impar viajan hacia la derecha, y las pares en sentido opuesto. Vamos a calcular el resultado de la superposición de todas estas ondas, de forma análoga a la sección anterior:

$$\xi_{\text{tot}} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + ... = \xi_+ + \xi_-$$

Cuando la onda $\xi_1$, que tiene amplitud $A_1$, llega al extremo derecho, tiene una reflexión total: aparece la onda $\xi_2$ con amplitud $-A_1$ (hay cambio de signo, es el extremo fijo). Cuando la onda $\xi_2$ llega a la izquierda, por reflexión total

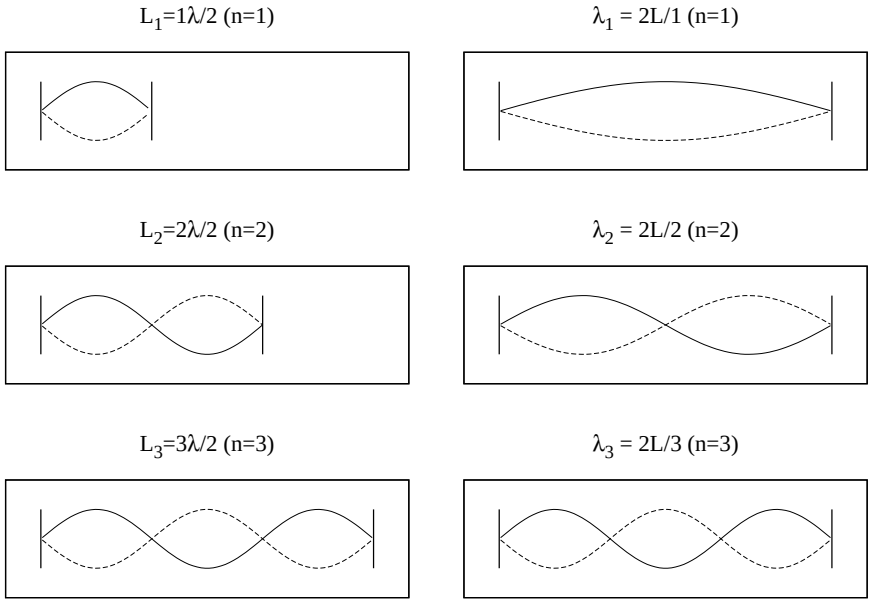



Figure 3.7: Cuerda con extremos fijos. Amplitudes de las ondas estacionarias para $\lambda$ fija y $L$ variable (derecha) y para $L$ fija con distintos valores de $\lambda$ (izquierda)

tendríamos la onda $\xi_3$. Aquí no hay cambio de signo, la onda $\xi_3$ tiene amplitud $-A_1$ porque el límite derecho de la cuerda es un punto libre. Entonces, al sumar las ondas $\xi_1$ y $\xi_3$ se ha de tener en cuenta que (a) tienen amplitudes con signo opuesto y (b) que en el punto $x$ la onda $\xi_3$ ha recorrido una distancia $2L$ mayor que la recorrida por $\xi_1$.

Sumemos:

$$\left.\begin{array}{r}\xi_1 = A_1 \sin(\omega t - kx) \\ \xi_3 = -A_1 \sin(\omega t - k(x+2L))\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\xi_1 + \xi_3 = A_1(\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t - kx - 2kL))$$

Como $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos[\alpha+\beta)/2]\sin[(\alpha-\beta)/2]$, reescribimos la resta de senos:

$$\xi_1 + \xi_3 = 2A_1 \sin(kL)\cos(\omega t - kx - kL)$$

La onda resultante de sumar $\xi_1 + \xi_3$ tiene amplitud máxima cuando

$$\sin(kL) = \pm 1 \implies kL = (2n-1)\frac{\pi}{2} \implies L = (2n-1)\frac{\pi}{2k} \implies$$

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

Es decir, cuando la longitud de la cuerda es un número impar de veces $\lambda/4$, se produce la interferencia constructiva entre ondas que viajan de izquierda a derecha.

$$L = (2n-1)\lambda/4 \implies \xi_1 + \xi_3 = 2A_1 \sin(\omega t - kx)$$

Si sumamos un número creciente de ondas que viajan en el mismo sentido, al final tendremos una onda $\xi_+$ de gran amplitud:

$$\xi_+ = A\sin(\omega t - kx)$$

con $A \gg A_1$. Ahora, procedamos con las ondas que viajan hacia la derecha. Superponemos las dos primeras ($\xi_2$ y $\xi_4$) para comenzar:

$$\left.\begin{array}{r} \xi_2 = A_1\sin(kx+\omega t) \\ \xi_4 = -A_1\sin(k(x+2L)+\omega t) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\xi_2 + \xi_4 = A_1(\sin(kx+\omega t) - \sin(kx+\omega t+2kL)) = ...$$

$$... = 2A_1\sin(kL)\cos(kx+\omega t+kL)$$

De nuevo, el resultado tendrá amplitud máxima (interferencia constructiva) cuando

$$kL = (2n-1)\frac{\pi}{2} \Longrightarrow L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

Si se cumple esta condición, la suma de todas las ondas que viajan hacia la izquierda será una onda de gran amplitud:

$$\xi_- = A\sin(\omega t + kx)$$

con $A \gg A_1$.

Finalmente, para conocer el resultado de la superposición de todas las ondas, sumamos $\xi_+ + \xi_-$

$$\xi_{\text{tot}} = A(\sin(\omega t+kx) + \sin(\omega t - kx)) = 2A\cos(kx)\sin(\omega t)$$

El resultado es una onda estacionaria: En cada punto $x$ se produce una oscilación de amplitud $2A\cos(kx)$. Esto sucederá siempre y cuando $L = (2n-1)\lambda/4$, o, dicho de otra manera, si $\lambda = 4L/(2n-1)$. Cuando tenemos ondas de una longitud de onda fija $\lambda$, tendremos ondas estacionarias como las descritas más arriba si:

- $L_1 = \lambda/4$ (n=1, armónico fundamental o primero)
- $L_2 = 3\lambda/4$ (n=2, segundo armónico)
- $L_3 = 5\lambda/4$ (n=3, tercer armónico)
- ...

En cambio, si tenemos una cuerda de longitud $L$ fija, obtendremos ondas estacionarias si enviamos a través de la cuerda ondas viajeras con longitud de onda:

- $\lambda_1 = 4L$ (n=1)
- $\lambda_2 = 4L/3$ (n=2)
- $\lambda_3 = 4L/5$ (n=3)
- ...

Ahora, las ondas estacionarias son como se muestran en la figura 3.8.

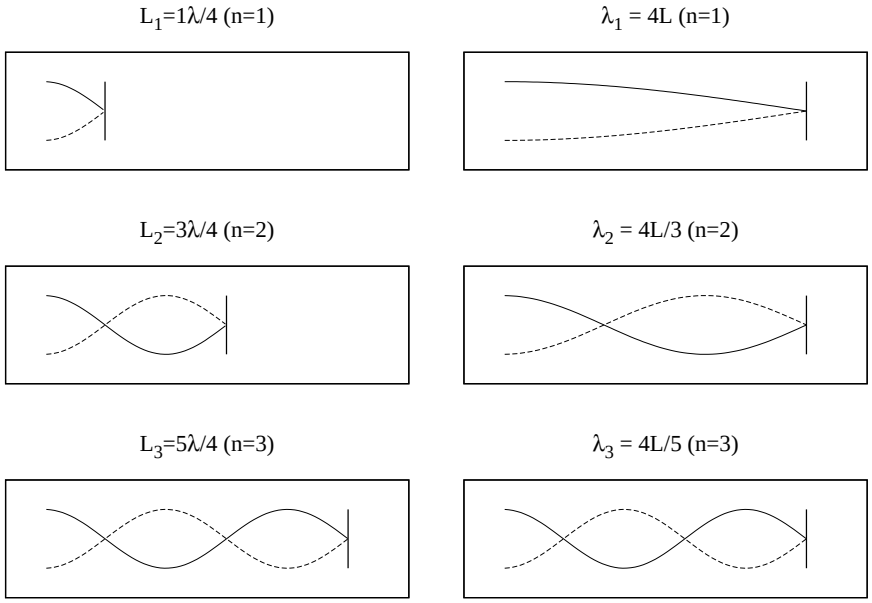



Figure 3.8: Cuerda con un extremo fijo y otro libre: Amplitudes de las ondas estacionarias para $\lambda$ fija y $L$ variable (derecha) y para $L$ fija con distintos valores de $\lambda$ (izquierda)

### 3.7.3 Ondas estacionarias: Dos extremos libres

Ejercicio: Comprobar el resultado presentado en este apartado.

Cuando las ondas estacionarias se producen por reflexiones totales en dos extremos libres, se demuestra que la relación entre el tamaño del medio $L$ y la longitud de onda es:

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

En tal caso, las ondas estacionarias que se forman vienen descritas por la ecuación:

$$\xi_{\text{tot}} = 2A\cos(kx)\sin(\omega t)$$

Por tanto, las soluciones son como se muestra en la figura 3.9:

## 3.8 Efecto Doppler

El efecto Doppler es un aparente cambio en las características de una onda cuando existe un movimiento relativo de la fuente de las ondas con respecto al observador.

### 3.8.1 Fuente en movimiento

Si un observador que se encuentra en reposo percibe una onda emitida por una fuente en movimiento, encontrará que las características de la onda no son las

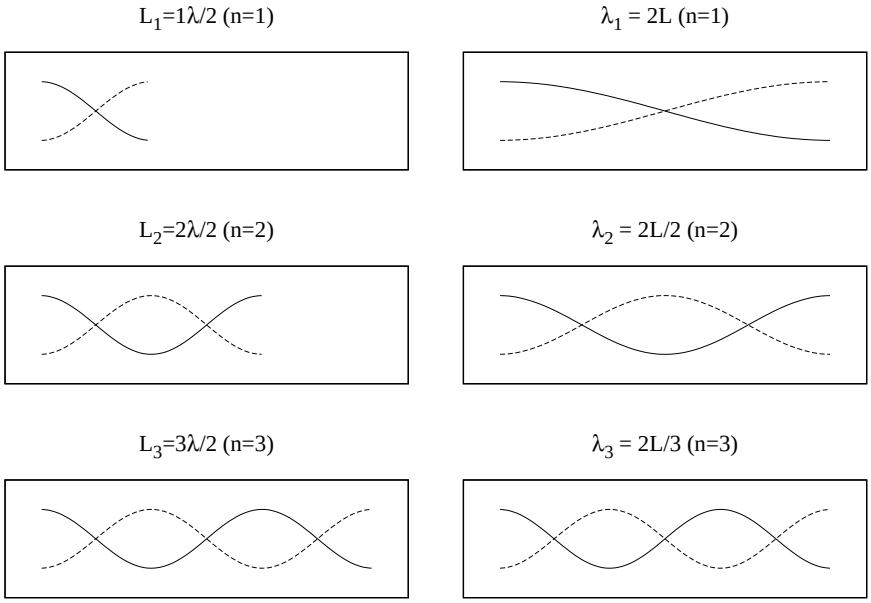



Figure 3.9: Cuerda con ambos extremos libres: Amplitudes de las ondas estacionarias para $\lambda$ fija y $L$ variable (derecha) y para $L$ fija con distintos valores de $\lambda$ (izquierda)

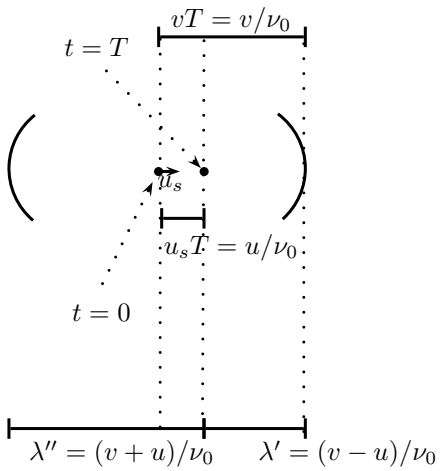
mismas que las que tendría si la fuente estuviese en reposo.

La frecuencia de la onda se puede interpretar como el número de frentes de onda que el observador registra por unidad de tiempo.

Si una fuente en reposo emite una onda con frecuencia $\nu_0$, una longitud de onda $\lambda_0$, y, por tanto, una velocidad $v = \lambda_0\nu_0$, el observador en reposo registrará el paso de $\nu_0$ frentes de onda a cada segundo, y además medirá que la distancia entre sucesivos frentes de onda es precisamente $\lambda_0$.

Supongamos ahora que la fuente se está moviendo con velocidad $u_s$ respecto al observador.

En el instante de tiempo $t = 0$ la fuente, que se encuentra en la posición $x = 0$, y se desplaza con velocidad $u_s$ hacia la derecha, emite un frente de onda, hacia la derecha. Pasado un tiempo $T = 1/\nu_0$, la fuente emitirá otro frente de onda. En ese preciso instante, el primer frente emitido habrá recorrido una distancia $v/\nu_0$, donde $v$ es la velocidad de la onda. Precisamente esa distancia es $\lambda_0$. El nuevo frente de onda, emitido en $t = T$, está en ese instante en la posición $x = u_s/\nu_0$, porque esa es la distancia que ha recorrido la fuente. Por tanto, un observador en reposo, detectará una longitud de onda (distancia entre frentes de onda) que será $\lambda' = v/\nu_0 - u_s/\nu_0$, que es una longitud de onda menor que la que mediríamos en reposo. En cambio, para el observador que ve como se aleja la fuente, la longitud de onda es $\lambda'' = v/\nu_0 + u_s/\nu_0$.




Por tanto, la longitud de onda medida por el observador es:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 \mp \frac{u_s}{v}\right)$$

El signo es negativo si la fuente se acerca al observador y positivo si la fuente se aleja. En términos de frecuencias, como $\lambda\nu = v$, también se puede definir el efecto Doppler:

$$\nu = \frac{v}{\lambda_0} \frac{1}{1 \mp \frac{u_s}{v}} \implies$$

$$\nu = \nu_0 \frac{v}{v \mp u_s} \tag{3.16}$$

donde $\nu_0$ es la frecuencia de emisión.

El efecto Doppler es el responsable de la distinta percepción del sonido cuando quien lo emite se está desplazando. El ejemplo clásico es el de la ambulancia: El sonido que percibimos cuando se aproxima a nosotros es agudo, pero cuando rebasa nuestra posición y se aleja, cambia bruscamente y pasa a resultarnos claramente más grave.

El efecto Doppler se utiliza para calcular la distancia a la que se alejan de nosotros las estrellas. Se sabe que el hidrógeno emite ondas electromagnéticas con una longitud de onda fija. Si, procedente de una estrella que se sabe que está compuesta de hidrógeno, nos llega una radiación electromagnética con una longitud de onda mayor, esto nos permite saber a qué velocidad se está alejando la fuente (estrella) de nosotros.

### 3.8.2 Observador en movimiento

Cuando es el observador el que está en movimiento, también percibe las ondas de forma distinta, aunque ahora el resultado es distinto.

Para ilustrar este efecto, podemos pensar en las olas del mar (ondas) que se mueven con velocidad $v$. Las ondas tienen un periodo $T$ y una longitud de onda $\lambda_0$. Una persona que esté en reposo, verá que en un tiempo $\Delta t$ pasa por su posición $N = v\Delta t/\lambda_0$ frentes de ondas. Una persona que se esté moviendo con velocidad $u_o$ en contra del sentido de avance de las olas, atravesará en el mismo intervalo de tiempo $N' = v\Delta t/\lambda_0 + u\Delta t/\lambda_0 = (v+u)\Delta t/\lambda_0$.

La frecuencia que mide cada observador es el número de frentes de onda que ve pasar dividido por el intervalo de tiempo, es decir, el observador en reposo mide:

$$\nu_0 = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda_0}$$

Mientras que el observador que se está desplazando, lo que mide es:

$$\nu = \frac{N'}{\Delta t} = \frac{v + u_o}{\lambda_0} = \nu_0 \frac{v + u_o}{v}$$

Si, en cambio, el observador en movimiento se estuviese desplazando en el mismo sentido que las olas, lo que mediría es:

$$\nu = \nu_0 \frac{v - u_o}{v}$$

Por tanto, en función del sentido del desplazamiento del observador escribimos que la frecuencia medida por él es:

$$\nu = \nu_0 \frac{v \pm u_o}{v} \tag{3.17}$$

### 3.8.3 Caso general

Hemos encontrado distintas expresiones para la frecuencia que un observador mide cuando hay movimiento relativo entre él y la fuente. Las ecuaciones 3.16 y 3.17 las podemos aunar en una sola:

$$\nu = \nu_0 \frac{v \pm u_o}{v \mp u_s}$$

donde $\nu_0$ es la frecuencia que se mediría si ambos estuviesen en reposo, $v$ es la velocidad de propagación de la onda, $u_s$ es la velocidad de la fuente emisora de la onda y $u_o$ es la velocidad del observador. Si fuente y observador se aproximan, tomaremos signos $+$ y $-$ en el numerador y denominador, respectivamente, y signos opuestos en el caso de que se estén alejando.

## 3.9 Ondas Electromagnéticas

Recordemos ahora las ecuaciones de Maxwell, que se estudiaron en esta asignatura:

**Ley de Gauss**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{K\epsilon_0}$$

**Ley de Gauss para el magnetismo**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

**Ley de Faraday**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

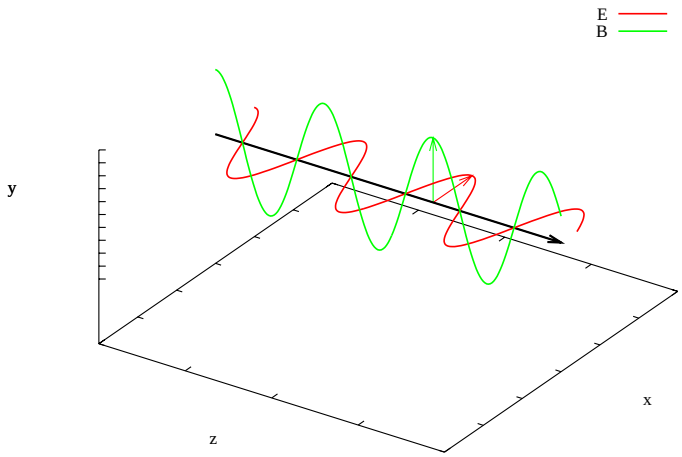



Figure 3.10: Onda eletromagnética propagándose en la dirección $\hat{z}$.

**Ley de Ampère**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 K_B \left( I + \epsilon_0 K \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Maxwell, tras inluir el término de corriente de desplazamiento en la ecuación de Ampère, predijo la existencia de las ondas electromagnéticas. Los campos elécrico y magnético pueden viajar por el espacio satisfaciendo la ecuación de ondas. Como veremos, según las dos últimas ecuaciones de Maxwell, el campo eléctrico resultante es consecuencia del campo magnético cambiante, y viceversa. Es decir, cada uno existe gracias al otro.

Las soluciones, para una onda electromagnética que se propaga en el sentido $hatz$ son del tipo:

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} \cos(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = B_0 \hat{y} \cos(kx - \omega t)$$

Es decir, son ondas transversales, y los campos eléctrico y magnético están en fase. En la figura 3.10 podemos ver un ejemplo.

La velocidad de propagación de la onda es $v = \omega/k = c$ ($c$ se utiliza para la velocidad de propagación de la radiación electromagnética en el vacío), y su longitud de onda es $\lambda = 2\pi/k$. En ondas electromagnéticas, siempre se tiene que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares. Además, la dirección de propagación es paralela a $\vec{E} \times \vec{B}$.

Estas ecuaciones para $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son de carácter ondulatorio, pero necesitan cumplir dos condiciones para ser soluciones válidas, es decir, para cumplir las ecuaciones de Maxwell. Las condiciones son:

$$B = \frac{\vec{E}}{c}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Maxwell predijo la existencia de las ondas electromagnéticas, y además predijo su velocidad de propagación en el vacío. Sustituyendo en la ecuación anterior los valores conocidos de $\epsilon_0$ y $\mu_0$ se tiene $c = 2.99 \cdot 10^8$ m/s.